Prof. Dr. Wolfgang Henke

Lineare Algebra I/II

Universität zu Köln

WS 2002/03

SS 2003

Vorlesung Seiten 1-311

		Seite
§ 1	Grundlagen	1
§ 2	Mengen, Relationen und Abbildungen	11
§ 3	Gruppen, Ringe, Körper	48
§ 4	Vektorräume und lineare Abbildungen	61
§ 5	Lineare Gleichungssysteme	97
§ 6	Die Determinante	105
§ 7	Eigenwerte	142
§ 8	Euklidische und unitäre Vektorräume	223
§ 9	Bilinearformen	301

Übungsaufgaben 1 – 134 (52 Seiten)

Index, Bezeichnungen (8 Seiten)

15.10.02
(1.)

W. Henke: Lineare Algebra I (WS 02/03)

§1 Grundlagen

1.1 (Aussagen)

Unter einer Aussage verstehen wir einen sprachlichen, grammatisch richtigen Ausdruck, von dem eindeutig feststeht, ob er „wahr" (w) oder „falsch" (f) ist. → heißen „Wahrheitswerte"

Beispiele:

1.) 13 ist eine Primzahl. — Aussage, w
2.) 13 ist eine Glückszahl. — keine Aussage
3.) Die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen ist abzählbar. — Aussage, f
4.) Die Zahl π ist rational. — Aussage, f
5.) Edmund Stoiber wäre der bessere Bundeskanzler — keine Aussage
6.) In unserem Milchstraßensystem gibt es weiteres Leben. — Aussage, w oder f
7.) Es existieren keine natürlichen Zahlen $n \geq 3$ und $x, y, z > 0$ mit $x^n + y^n = z^n$ (Fermatsche Vermutung) — Aussage, w
8.) Es macht Spaß, eine Vorlesung vor über 400 Hörern zu halten. — keine Aussage

Ist A eine Aussage, so sagen wir statt „A ist wahr" auch „A gilt" und statt „A ist falsch" auch „A gilt nicht".
Noch kürzer schreiben wir statt „A ist wahr" oft auch einfach „A"

1.2 (Logische Verknüpfungen von Aussagen zu neuen Aussagen)

Def.: Seien A, B, C, ... Aussagen.
Wir definieren dann neue Aussagen wie folgt:

(i) $\boxed{\neg A}$ (Negation von A)
„nicht A"
„non A"

$\neg A$ ist (per def) genau dann wahr, wenn A falsch ist

Wahrheitswerttafel:

A	$\neg A$
w	f
f	w

(ii) $\boxed{A \wedge B}$ (Konjugation von A und B)
„A und B"

$A \wedge B$ ist wahr genau dann, wenn A wahr und B wahr, sonst falsch

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Ebenso ist die Aussage $A \wedge B \wedge C$ def. als $(A \wedge B) \wedge C$ usw.

(iii) $A \vee B$ (Disjunktion von A und B)

„A oder B"

„nicht ausschließendes oder"

$A \vee B$ ist wahr genau dann, wenn A wahr oder B wahr, (d.h. wenn mindestens eine der Aussagen A, B wahr ist).

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Im Gegensatz dazu hat das „ausschließende oder"

$A \dot{\vee} B$ die Wahrheitswerttafel:

„entweder A oder B"

A	B	$A \dot{\vee} B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

$A \dot{\vee} B$ ist also wahr genau dann, wenn genau eine der Aussagen A, B wahr ist.

Man definiert weiter $A \vee B \vee C$ als $(A \vee B) \vee C$ usw.

(iv) $A \Rightarrow B$ (logische Implikation)

Prämisse, Konklusion

„wenn A, so B"

„aus A folgt B"

„A impliziert B"

„B ist notwendige Bedingung für A"

„A ist hinreichende Bedingung für B"

$A \Rightarrow B$ ist (per def.) falsch genau dann, wenn A wahr und B falsch, sonst wahr

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Z

2 Im Unterschied zur Umgangssprache ist für uns also „wenn A, so B" insbesondere per def. immer dann wahr, wenn A falsch ist, (egal ob B wahr oder B falsch ist)

Beispiel: Drei Implikationen

$5 - 1 = 2 \Rightarrow \{4, 5\}$ ist eine Primzahl

(„Wenn 5 minus 1 gleich 2 ist, ist $\{4, 5\}$ eine Primzahl")

sind wahre Aussagen gemäß unserer Def.,

(in der Umgangssprache wohl als „unsinnige Aussagen" bezeichnet).

Bemerkung: Drei Schreibweisen

Satz. Var.: A Beh.: B

oder

Satz Gelte A. Dann folgt B.

sind per def. gleichbedeutend mit

$A \Rightarrow B$ ist wahr,

d.h. mit

$A \Rightarrow B$

(Also insbes.: Jede Satz, dessen Var. falsch ist, ist wahr.)

18.10.02 (2.)

(v) $A \Leftrightarrow B$ (logische Äquivalenz)

„A ist äquivalent zu B"

$A \Leftrightarrow B$ ist (per def) wahr genau dann, wenn A und B beide wahr oder A und B beide falsch.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

1.3 Satz (Regeln des logischen Schließens, oft: „Tautologien", nur eine Auswahl)

Sind A, B, C bel. Aussagen, so sind die folgenden Aussagen sämtlich wahr:

$$\big(\neg(\neg A)\big) \iff A \tag{1}$$

$$\big(\neg(A \wedge B)\big) \iff \big((\neg A) \vee (\neg B)\big) \tag{2}$$

$$\big(\neg(A \vee B)\big) \iff \big((\neg A) \wedge (\neg B)\big) \tag{3}$$

$$\big(A \wedge (B \vee C)\big) \iff \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big) \tag{4}$$

$$\big(A \vee (B \wedge C)\big) \iff \big((A \vee B) \wedge (A \vee C)\big) \tag{5}$$

$$\big(A \Rightarrow B\big) \iff \big((\neg B) \Rightarrow (\neg A)\big) \tag{6}$$

$$\text{"} \iff \big((\neg A) \vee B\big) \tag{7}$$

$$\big(\neg(A \Rightarrow B)\big) \iff \big(A \wedge (\neg B)\big) \tag{8}$$

$$(A \Leftrightarrow B) \iff \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big) \tag{9}$$

$$\big(\neg(A \Leftrightarrow B)\big) \iff \big((\neg A) \Leftrightarrow B\big) \tag{10}$$

$$\big((A \Rightarrow B) \wedge A\big) \Longrightarrow B \tag{11}$$

$$\big((A \vee B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Longrightarrow C \tag{12}$$

Beweis: Zu (6) (als Beispiel)

Nach 1.2 (V) ist zu zeigen, daß beide Seiten der behaupteten Äquivalenz stets zugleich wahr und zugleich falsch sind (bei beliebigen Wahrheitswerten von A, B). Hierzu:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Bemerkung: (6) beinhaltet die Äquivalenz von

Satz	Vor.: A Beh.: B

und

Satz	Vor.: $\neg B$ Beh.: $\neg A$

(Methode des „indirekten Beweises").

1.4 (Aussageformen)

(i) Sei Ω eine vorgegebene Klasse (Gesamtheit) von Objekten. Unter einer einstelligen Aussageform mit Einsetzungsklasse Ω verstehen wir einen sprachlichen, grammatisch richtigen Ausdruck $H(\ldots)$ mit einer „Leerstelle" derart, daß gilt:

$H(x)$ ist eine Aussage für jedes Objekt x, das zu Ω gehört.

Beispiele: 1) $\Omega = \mathbb{R}$ (alle reellen Zahlen)

$H(x) :\Leftrightarrow x$ ist eine rationale Zahl

z.B. $H(3)$ wahr, $H(\sqrt{2})$ falsch.

2) $\Omega = \mathbb{N}$ (alle natürlichen Zahlen $\underline{0}, 1, 2, \ldots$)

$H(x) :\Leftrightarrow x$ ist Summe von zwei Quadraten positiver natürlicher Zahlen

z.B. $H(2)$ wahr $(2 = 1^2 + 1^2)$, $H(25)$ wahr $(25 = 3^2 + 4^2)$,

$H(3)$ falsch

3) M Menge, Ω Klasse aller Mengen.

$H(x) :\Leftrightarrow x$ ist Teilmenge von M.

Eine einstellige Aussageform heißt auch eine Eigenschaft.

Ist $H(x)$ wahr (falsch) für ein x aus Ω, so sagt man:

x hat (hat nicht) die Eigenschaft $H(\dots)$.

(ii) Seien Ω_1 und Ω_2 zwei Klassen von Objekten.

Eine zweistellige Aussageform mit Einsetzungsklassen Ω_1, Ω_2 ist ein sprachlicher, grammatisch richtiger Ausdruck $H(\dots,\dots)$ mit zwei Leerstellen derart, daß gilt:

$H(x_1,x_2)$ ist eine Aussage für jedes x_1 aus Ω_1 und jedes x_2 aus Ω_2.

Beispiele: 1.) $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$,

$H(x_1,x_2) :\Longleftrightarrow x_1 \leq x_2$.

z.B. $H(2,3)$ wahr, $H(3,2)$ falsch

2.) $\Omega_1 = \Omega_2 =$ Klasse aller Mengen,

$H(x_1,x_2) :\Longleftrightarrow x_1$ ist Teilmenge von x_2.

Eine zweistellige Aussageform heißt auch eine zweistellige Relation.

Drei- und mehrstellige Aussageformen (Relationen) werden analog definiert.

$\boxed{1.5}$ (Quantoren)

(i) Sei $H(\ldots)$ eine einstellige Aussageform mit Einsetzungsklasse Ω.

Dann def.-en wir zwei neue Aussagen wie folgt:

$\boxed{\forall_x H(x)}$ $:\Longleftrightarrow$ $\forall_x H(x)$ ist per def. wahr genau dann, wenn für alle x aus Ω die Aussage $H(x)$ wahr ist

„für alle x gilt $H(x)$"

Merkregel: $\forall$ = umgekehrtes $\underbrace{A}_{\text{wie ALLE}}$

[Bemerkung: In der Literatur manchmal auch

$\bigwedge_x H(x)$ statt $\forall_x H(x)$.]

$\boxed{\exists_x H(x)}$ $:\Longleftrightarrow$ $\exists_x H(x)$ ist per def wahr genau dann, wenn (mindestens) ein x aus Ω existiert, für das $H(x)$ wahr ist.

„es existiert (mindestens) ein x, für das $H(x)$ gilt"

Merkregel: $\exists$ = umgekehrtes $\underbrace{E}_{\text{wie EXISTIERT}}$

[Bemerkung: In der Literatur manchmal auch

$\bigvee_x H(x)$ statt $\exists_x H(x)$.]

Offenbar gilt $(\forall_x H(x)) \Longleftrightarrow (\forall_y H(y))$ usw.

((Seite 6 unten))

Beispiele 1.) Sei $H(\dots)$ wie in 1.4(i), Beispiele 1.) und 2.)

In beiden Fällen ist $\forall_x H(x)$ falsch und $\exists_x H(x)$ wahr.

2.) Mit $H(\dots)$ ist auch $\neg H(\dots)$ eine einstellige Aussageform mit Einsetzungsklasse Ω. Es gilt offenbar

$$\left(\neg\left(\forall_x H(x)\right)\right) \iff \left(\exists_x \left(\neg H(x)\right)\right) \qquad (1)$$

und

$$\left(\neg\left(\exists_x H(x)\right)\right) \iff \left(\forall_x \left(\neg H(x)\right)\right). \qquad (2)$$

(ii) Sei $H(\dots,\dots)$ eine zweistellige Aussageform mit Einsetzungsklassen Ω_1, Ω_2. Dann können wir folgende neuen Aussagen betrachten:

$\forall_{x_1} \forall_{x_2} H(x_1,x_2)$,	$\forall_{x_2} \forall_{x_1} H(x_1,x_2)$,
$\forall_{x_1} \exists_{x_2} H(x_1,x_2)$,	$\exists_{x_2} \forall_{x_1} H(x_1,x_2)$,
$\exists_{x_1} \forall_{x_2} H(x_1,x_2)$,	$\forall_{x_2} \exists_{x_1} H(x_1,x_2)$,
$\exists_{x_1} \exists_{x_2} H(x_1,x_2)$,	$\exists_{x_2} \exists_{x_1} H(x_1,x_2)$.

Dabei ist z.B. die Aussage $\forall_{x_1} \exists_{x_2} H(x_1,x_2)$ per def wahr genau dann, wenn für alle x_1 aus Ω_1 die Aussage

$$\underbrace{\exists_{x_2} H(x_1,x_2)}_{\exists_{x_2} \tilde{H}(x_2)} \quad \text{gilt},$$

wobei $\tilde{H}(\dots)$ die einstellige Aussageform $H(x_1,\dots)$ mit Einsetzungsklasse Ω_2 (bei festem x_1).

d.h. genau, wenn für alle x_1 aus Ω_1 mindestens ein x_2 aus Ω_2 existiert derart, daß $H(x_1,x_2)$ gilt.

(Also $\forall_{x_1} \exists_{x_2} H(x_1,x_2)$ bedeutet per def. $\forall_{x_1}\left(\exists_{x_2} H(x_1,x_2)\right)$)

Beispiel: $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$

$H(x_1, x_2) :\Leftrightarrow \quad x_1 \leq x_2$

$\underbrace{\forall_{x_1} \exists_{x_2} \; x_1 \leq x_2}$ ist wahr, $\underbrace{\exists_{x_2} \forall_{x_1} \; x_1 \leq x_2}$ ist falsch

(Zu jeder reellen Zahl x_1 gibt es eine reelle Zahl x_2 mit $x_1 \leq x_2$)

(Es existiert eine reelle Zahl x_2, die größer oder gleich jeder reellen Zahl x_1 ist, d.h. es existiert eine größte reelle Zahl)

§2 Mengen, Relationen und Abbildungen

2.1 Vorbemerkung

G. Cantor formulierte im Jahre 1895:

„Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen."

Dieser Mengenbegriff ist zu „naiv" und führt leicht zu Widersprüchen. Legt man ihm zugrunde, dann gibt es auch eine

Menge M_1 aller Mengen (d.h. „$M_1 = \{N \mid N \text{ Menge}\}$")

und auch eine

Menge M_2, deren Elemente genau diejenigen Mengen sind, die sich nicht selbst als Element enthalten (d.h. „$M_2 = \{N \mid N \text{ Menge} \wedge N \notin N\}$")

Die Menge M_2 ist in sich widersprüchlich, denn es gilt sowohl $M_2 \in M_2$ als auch das Gegenteil $M_2 \notin M_2$. (Denn aus $M_2 \notin M_2$ folgt nach Def. von M_2: $M_2 \in M_2$ und aus $M_2 \in M_2$ folgt nach Def. von M_2: $M_2 \notin M_2$.) Dies ist die bekannte Russellsche Antinomie.

Um diesen und andere Widersprüche zu vermeiden, verzichten wir völlig auf eine „Definition" der Menge und gehen axiomatisch vor. Die heute üblicherweise der Mathematik zugrundegelegte

Axiomatische Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel mit Auswahlaxiom (englisch: axiom of choice) } kurz ZFC genannt

können wir in dieser Anfängervorlesung nur skizzieren. Wir werden immerhin alle Zermelo-Fraenkel-Axiome nennen. Ein empfehlenswertes Buch über ZFC:

HRBACEK/JECH. Introduction to set theory
Second Edition 1984, Verlag Marcel Dekker.

2.2 Wir betrachten einen Bereich von Objekten, die wir „Mengen" nennen, als vorgegeben.

Auf diesem Bereich sei eine zweistellige Aussageform (die „Element-Beziehung") vorgegeben, die wir mit $\dots \in \dots$ bezeichnen, d.h. für je zwei Mengen X, Y stehe fest,

ob $X \in Y$ gilt, (d.h. „$X \in Y$", in Worten: „X ist Element von Y")

oder

ob $X \notin Y$ gilt, (d.h. „$X \notin Y$", in Worten „X ist nicht Element von Y")

Wir setzen für diesen Bereich von Mengen mit der Element-Beziehung die Gültigkeit von 9 Axiomen ① bis ⑨ voraus, (die sog. „Axiome von Zermelo/Fraenkel"), die – soweit man weiß – widerspruchsfrei sind, und werden daraus alle Definitionen und Sätze ableiten.

Bezeichnungen für Mengen z.B. $X, Y, \dots, x, y, \dots, \alpha, \beta, \dots$

„$X = Y$" bedeutet, daß X und Y Bezeichnungen für dieselbe Menge sind, also

$$X = X, \quad X = Y \Rightarrow Y = X, \quad X = Y \wedge X \in Z \Rightarrow Y \in Z$$

$$X = Y \wedge Z \in X \Rightarrow Z \in Y$$

$X \neq Y$ bedeutet $\neg (X = Y)$

2.3 Axiom ① (Existenz-Axiom):

Es existiert (mindestens) eine Menge, die kein Element besitzt.

Axiom ② (Extensions-Axiom) ← „Ausdehnungs-Axiom"

Für alle Mengen A, B gilt: Ist jedes Element von A auch ein Element von B und ist jedes Element von B auch ein Element von A, so folgt $A = B$,
d.h. wenn zwei Mengen A, B dieselben Elemente haben, dann sind sie identisch,
(d.h. zwei Mengen sind genau dann identisch, wenn sie dieselben Elemente haben).

Mittels ① und ② können wir beweisen:

Lemma Es existiert genau eine Menge, die kein Element besitzt. Diese heißt die leere Menge und wir bezeichnen sie mit $\emptyset$.

Beweis: Die Existenz ist klar nach Ax. ①
Zur Eindeutigkeit: Angenommen A und B sind Mengen, die kein Element besitzen. Dann folgt aus Ax. ②, daß $A = B$, q.e.d.

2.4 Axiom ③ (Komprehensions-Axiom) ← „Aussonderungs-Axiom"

Sei $P(\dots)$ eine für Mengen definierte Eigenschaft (d.h. eine einstellige Aussageform mit der Klasse aller Mengen als Einsetzungsklasse), d.h. für jede Menge X stehe fest, ob die Aussage $P(X)$ gilt („$P(X)$") oder nicht gilt („$\neg P(X)$").
Dann existiert zu jeder Menge A (mindestens) eine Menge B derart, daß

$$\bigwedge_{X\,(\text{Menge})} \left(X \in B \iff X \in A \wedge P(X) \right),$$

d.h. die Elemente von B sind genau diejenigen Elemente der Menge A, für die $P(X)$ gilt.

Nach dem Extensions-Axiom ② gilt für je zwei Mengen $B, \tilde{B}$ mit der obigen Eigenschaft: $B = \tilde{B}$. Daher können wir definieren:

$\boxed{\{X \in A \mid P(X)\}}$ sei die eindeutig bestimmte Menge, deren Elemente die Elemente X von A sind, für die $P(X)$ gilt

auch

(oder irgend ein anderes Symbol statt X) $\boxed{\{X \mid X \in A \wedge P(X)\}}$

Warnung: Aus Ax. 3 folgt nicht die Existenz einer Menge $\tilde{B}$ mit

$$\forall_X \left(X \in B \Leftrightarrow P(X)\right), \quad (\text{d.h. einer Menge } \{X \mid P(X)\}).$$

$\boxed{\text{Lemma}}$ Zu beliebigen Mengen A, B existiert genau eine Menge C mit.

$$\forall_X \left(X \in C \Leftrightarrow (X \in A \wedge X \in B)\right).$$

Diese Menge heißt der Durchschnitt von A und B und man bezeichnet sie mit $\boxed{A \cap B}$.

Beweis: Seien A, B Mengen. Für jede Menge X sei $P(X)$ die Aussage $X \in B$. Dann ist $P(\ldots)$ eine für Mengen definierte Eigenschaft. Dann hat die Menge $\{X \in A \mid P(X)\}$ nach Ax. 3 die im Lemma genannte Eigenschaft, und die Einzigkeit ist klar nach Ax 2, q.e.d.

Es gilt also:

$$A \cap B = \{X \mid X \in A \wedge X \in B\}$$

$$\cap \qquad\qquad \wedge$$

($P(X)$ sei jetzt die Aussage $X \notin B$)

Analog folgt:

$\boxed{\text{Lemma}}$ Zu beliebigen Mengen A, B existiert genau eine Menge D mit

$$\forall_X \left(X \in D \Leftrightarrow (X \in A \wedge X \notin B)\right)$$

Diese Menge heißt die Differenz(menge) von A und B und man bezeichnet sie mit $\boxed{A \setminus B}$

Es gilt also: $A \setminus B = \{X \mid X \in A \wedge X \notin B\}$.

2.5 Axiom ④ (Paarmengen-Axiom)

Zu beliebigen Mengen A, B ((nicht notwendig $A \neq B$))
existiert eine Menge C mit

$$\forall_X \left(X \in C \iff (X = A \vee X = B) \right),$$

d.h. A, B sind die einzigen Elemente von C

Nach ② ist C dann eindeutig bestimmt und wir bezeichnen diese Menge mit $\boxed{\{A, B\}}$. ← heißt „Zweiermenge"

Im Falle $A \neq B$ hat $\{A, B\}$ genau die zwei verschiedenen Elemente A und B und es gilt $\{A, B\} = \{B, A\}$,

im Falle $A = B$ hat $\{A, B\} =: \{A\}$ genau das eine Element A
↑ „Einermenge"

Beispiele: 1.) Die Menge $\{\emptyset\}$ hat $\emptyset$ als einzigen Element, also insbes. $\{\emptyset\} \neq \underbrace{\emptyset}_{\text{hat kein Element}}$

2.) Die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ hat genau die zwei verschiedenen Elemente $\emptyset$, $\{\emptyset\}$.

3.) Die Menge $\{\{\emptyset\}\}$ hat $\underbrace{\{\emptyset\}}_{\neq \emptyset \text{ 1.)}}$ als einzigen Element, $\{\{\emptyset\}\} \neq \{\emptyset\}$

2.6 Axiom ⑤ (Vereinigungsmengen-Axiom)

Zu jeder Menge A existiert eine Menge C mit

$$\forall_X \left(X \in C \iff \exists_{B \in A} X \in B \right),$$

d.h. X ist Element von C, wenn X Element mindestens eines Elements von A ist,

d.h. die Elemente von C sind die Elemente der Elemente von A.

Nach ② ist C wieder eindeutig bestimmt und wir bezeichnen C mit

$$\boxed{\bigcup A} \quad \left(\text{oder } \boxed{\bigcup_{B \in A} B} \right)$$

↑ (oder irgendein anderes Symbol statt B)

$\bigcup A$ heißt die Vereinigung(smenge) von A

(Beachte: Jede Menge ist ein „System von Mengen", d.h. besitzt als Elemente wieder Mengen.)

Sind M, N Mengen, so schreibt man auch

$$\boxed{M \cup N} := \underbrace{\bigcup \overbrace{\{M, N\}}^{\text{Menge nach Ax 4}}}_{\text{Menge nach Ax 5}},$$

also $\forall_X (X \in M \cup N \Leftrightarrow (X \in M \vee X \in N))$,

d.h.

$$M \cup N = \{X \mid X \in M \vee X \in N\}$$

$\cup$ $\qquad\qquad$ $\vee$

25.10.02 (4.) Beispiele: 1.) $\bigcup \emptyset = \emptyset$

2.) Sei $X := \{\underbrace{\emptyset}_{\text{hat kein Element}}, \underbrace{\{\emptyset\}}_{\text{hat } \emptyset \text{ als einziges Element}}\}$. Dann $\bigcup X = \{\emptyset\}$.

3.) $\{\{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

$\boxed{2.7}$ Definition: (Teilmengen-Relation).

Seien X, Y Mengen. Wir definieren dann

$$\boxed{X \subset Y} :\Leftrightarrow \forall_Z (Z \in X \Rightarrow Z \in Y)$$

d.h. jedes Element von X ist auch Element von Y

auch: $\boxed{Y \supset X}$

„X ist Teilmenge von Y"

$$\boxed{X \subsetneq Y} :\Leftrightarrow (X \subset Y \wedge X \neq Y)$$

auch $\boxed{Y \supsetneq X}$

„X ist echte Teilmenge von Y"

$\dots C \dots$ ist eine zweistellige Aussageform (die „Teilmengen-Beziehung"), d.h. für je zwei Mengen X, Y steht fest, ob $X \subset Y$ gilt oder nicht gilt.

Z In der Literatur häufig $X \subseteq Y$ statt wie hier in der Vorl. $X \subset Y$ und $X \subset Y$ " " " $X \subsetneq Y$

Beispiele: 1.) $\forall_A \; \emptyset \subset A$, $A \subset A$,

2.) $\{\emptyset\} \subset \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}$,
$\{\{\emptyset\}\} \subset$ "

3.) $B \in A \Rightarrow B \subset \bigcup A$,

4.) $A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$ (nach Ax. ②),

5.) $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Axiom ⑥ (Potenzmengen-Axiom)

Zu jeder Menge A existiert eine Menge C mit

$$\forall_X \left(X \in C \Leftrightarrow X \subset A \right),$$

d.h. die Elemente von C sind die Teilmengen von A.

Nach ② ist C eindeutig bestimmt. Wir schreiben $\boxed{\mathfrak{P}(A)}$ für C

„Potenzmenge von A"

Beispiele: 1.) $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

2.) $\mathfrak{P}(\{x\}) = \{\emptyset, \{x\}\}$

3.) $\mathfrak{P}(\{x,y\})$ hat genau die Elemente $\underbrace{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}}$,
im Falle $x \neq y$ alle verschieden

d.h. per def. $\mathfrak{P}(\{x,y\}) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}\}$

2.8 Satz

(i) Es existiert keine Menge M mit $\forall_{X\,(\text{Menge})}\ X \in M$,

(d.h. es existiert keine „Menge aller Mengen")

(ii) Sei A eine Menge. Dann existiert keine Menge $\tilde{A}$ mit

$$\forall_X \left(X \in \tilde{A} \iff X \notin A \right),$$

(d.h. es existiert keine „Komplimentärmenge zu A").

Beweis: Zu (i): Angenommen es existiert doch eine Menge M mit $\forall_X\ X \in M$.

Dann ist nach Ax. (3) auch

$$A := \{ X \in M \mid X \notin X \}$$

eine Menge, also gilt auch $A \in M$ und zusätzlich entweder $A \in A$ oder $A \notin A$.

Im Falle $A \in A$ folgt (wegen $A \in M$) nach Def. von A: $A \notin A$, und im Falle $A \notin A$ folgt nach Def. von A: $A \in A$. Man erhält also in jedem Fall einen Widerspruch. ((Daher war die obige Annahme falsch, also gilt (i).))

Zu (ii): Angenommen es existiert doch eine Menge $\tilde{A}$ wie in (ii). Dann ist nach 2.6 auch $M := A \cup \tilde{A}$ eine Menge und es gilt $\forall_X\ X \in M$ im Widerspruch zu (i), q.e.d.

2.9 Satz

Zu jeder Menge $A \neq \emptyset$ existiert genau eine Menge C mit

$$\forall_X \left(X \in C \iff \forall_{B \in A}\ X \in B \right),$$

d.h. X ist Element von C, wenn X Element jedes Elements von A ist

Man bezeichnet C mit $\bigcap A$ und nennt diese Menge die Durchschnittsmenge von A. (oder $\bigcap_{B \in A} B$)

<u>Beweis:</u> Wegen $A \neq \emptyset$ existiert eine Menge B_0 mit $B_0 \in A$.
Nach Axiom ③ ist

$$C := \{X \in B_0 \mid \overbrace{\forall_{B \in A}\, X \in B}^{\Leftrightarrow :\, P(X)}\}$$

eine Menge mit der Eigenschaft

$$\forall_X \left(X \in C \Leftrightarrow \forall_{B \in A}\, X \in B \right),$$

also nach Axiom ② die einzige derartige Menge. (Beachte dabei: Aus $\forall_{B \in A}\, X \in B$ folgt wegen $B_0 \in A$, daß $X \in B_0$). q.e.d.

Offenbar gilt für Mengen M, N stets

$$M \cap N = \bigcap \{M, N\}.$$

2.10

(i) Def. (der ersten natürlichen Zahlen) s.u. 2.11

$\boxed{0} := \emptyset$ hat kein Element

$\boxed{1} := 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\emptyset\}$ hat $\emptyset$ als einziges Element

$\boxed{2} := 1 \cup \{1\} = \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ hat $\emptyset, \{\emptyset\}$ als einzige Elemente

$\boxed{3} := 2 \cup \{2\} = \{0,1,2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ ...

$\boxed{4} := 3 \cup \{3\} = \{0,1,2,3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$ ...

usw. .....

(ii) Def.: Für jede Menge x heißt die Menge

$$\boxed{S(x) := x \cup \{x\}}$$

der Nachfolger von x. Statt $S(x)$ schreibt man auch $\boxed{x+1}$.

Nach (i) gilt also $1 = \underset{0+1}{S(0)}$, $2 = \underset{1+1}{S(1)}$, $3 = \underset{2+1}{S(2)}$, $4 = \underset{3+1}{S(3)}$, ...

Eine Menge I heißt induktiv genau dann, wenn gilt:

1.) $0 \in I$

und

2.) $\forall_{n \in I} \quad n+1 = S(n) \in I$

(d.h. $0 = \emptyset$ ist Element von I und mit n ist auch $n+1 = S(n)$ Element von I)

Für jede induktive Menge gilt $0 \in I$ (1.), also $1 = S(0) \in I$ (2.), also $2 = S(1) \in I$ (2.), also $3 \in I$, also $4 \in I$, ..., d.h. $0, 1, 2, 3, 4, \ldots \in I$.

Idee: Wir möchten eine Menge haben, die genau die Elemente $0, 1, 2, \ldots$ enthält (und diese dann die „Menge der natürlichen Zahlen" nennen). Diese Menge sollte die kleinste induktive Menge und der „Durchschnitt" aller induktiven Mengen sein. Aus den bisherigen Axiomen ① bis ⑥ folgt jedoch nicht die Existenz einer induktiven Menge, ja noch nicht einmal die Existenz irgendeiner „unendlichen" Menge. Denn die ersten sechs Axiome liefern ausgehend von „endlichen" Mengen immer wieder nur „endliche" Mengen. Es ist deshalb naheliegend, das folgende Axiom hinzuzunehmen:

2.11 (i) **Axiom ⑦** (Unendlichkeits-Axiom)

Es existiert (mindestens) eine induktive Menge I_0

(ii) **Def.** (Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen)

Nach Axiom ③ ist

$$\mathbb{N} := \{ x \in I_0 \mid \underbrace{x \in I \text{ für jede induktive Menge}}_{\Leftrightarrow: P(x)} \}$$

(I_0: wie in Ax. ⑦)

eine Menge und es gilt offenbar

$$\boxed{\forall_x \left(x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in I \text{ für jede induktive Menge} \right)} \quad (*)$$

$\mathbb{N}$ heißt die Menge der natürlichen Zahlen.

Die Elemente von $\mathbb{N}$ heißen natürliche Zahlen, insbes. sind also $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ (vgl. 2.10(i')) natürliche Zahlen.

(iii) **Satz** $\mathbb{N}$ ist eine induktive Menge, und für jede induktive Menge I gilt $\mathbb{N} \subset I$, (also $\mathbb{N}$ die „kleinste induktive Menge")

29.10.02 (5.)

Beweis: 1.) Für jede induktive Menge I gilt $0 \in I$, also nach $(*)$: $0 \in \mathbb{N}$.

2.) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach $(*)$ für jede induktive Menge I: $n \in I$, also auch $n+1 = S(n) \in I$, folglich nach $(*)$: $n+1 = S(n) \in \mathbb{N}$.

Damit ist die Induktivität von $\mathbb{N}$ gezeigt.

$\mathbb{N} \subset I$ für jede induktive Menge I ist klar nach $(*)$,

q.e.d.

(iv) **Satz** (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $P(\dots)$ eine für natürliche Zahlen definierte Eigenschaft, (d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ stehe fest, ob $P(n)$ wahr ist oder falsch ist.

Es gelte 1.) $P(0)$

und

2.) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \left(P(n) \Rightarrow P(n+1) \right)$.

Dann folgt: $\forall_{n \in \mathbb{N}} P(n)$.

Beweis: $I := \{ n \in \mathbb{N} \mid P(n) \}$ ist eine Menge, die nach Vor. induktiv ist. Nach letztem Satz (vgl. (iii)) gilt daher $\mathbb{N} \subset I$, also $\forall_{n \in \mathbb{N}} P(n)$, q.e.d.

2.12 Für je zwei Mengen a, b hatten wir (auf Grund des Paarmengen-Axioms ④) das „ungeordnete Paar" $\underbrace{\{a, b\}}_{\text{die eind. best Menge, die genau die Mengen } a, b \text{ als Elemente enthält (evtl. } a = b)} = \{b, a\}$ eingeführt

(i) Def.: (Geordnetes Paar)

Für Mengen a, b definieren wir die Menge

$$\boxed{(a, b)} := \{ \underbrace{\{a\}}_{\in \mathcal{P}(\{a,b\})}, \underbrace{\{a, b\}}_{\in \mathcal{P}(\{a,b\})} \} \in \underbrace{\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\{a, b\})\right)}_{\text{ist Menge nach ④, ⑥}}$$

heißt geordnetes Paar (mit erster Komponente a und zweiter Komponente b)

(ii) **Satz** $\forall_{\substack{a, b, a', b' \\ \text{(Mengen)}}} \left(\left((a, b) = (a', b') \right) \Leftrightarrow \left(a = a' \wedge b = b' \right) \right)$

Beweis: als Übung.

Folgerung $\forall_{a, b} \left(a \neq b \Rightarrow (a, b) \neq (b, a) \right)$

(iii) Def.: Wir definieren weiter für bel. Mengen a, b, c:

$$\boxed{(a, b, c)} := \underbrace{((a, b), c)}_{\text{geordnetes Paar mit erster Komponente } (a,b) \text{ und zweiter Komponente } c}$$

$\boxed{(a, b, c)}$ heißt geordnetes Tripel

Dann gilt analog zu (ii):

$$\forall_{a,b,c,a',b',c'} \left(\left((a,b,c) = (a',b',c') \right) \Leftrightarrow \left(a = a' \wedge b = b' \wedge c = c' \right) \right)$$

[wegen $((a,b),c) = ((a',b'),c') \underset{(ii)}{\Leftrightarrow} \underbrace{\left((a,b) = (a',b') \wedge c = c' \right)}_{\Downarrow (ii)}$

$a = a' \wedge b = b'$]

Ebenso für bel. Mengen a, b, c, d:

$$\boxed{(a, b, c, d)} := ((a, b, c), d) \quad \text{„usw."}$$

$\boxed{(a, b, c, d)}$ geordnetes Quadrupel

Ferner führen wir die folgende Bezeichnung ein:

$$\boxed{(a)} := a$$

$\boxed{(a)}$ 1-Tupel

2.13 Def. (Kartesisches Produkt)

(i) Für bel. Mengen A, B existiert genau eine Menge $\boxed{A \times B}$ mit

$$\forall_X \Big(X \in A \times B \iff \underbrace{\exists_{a,b} \; X = (a,b) \wedge a \in A \wedge b \in B}_{\text{d.h. } X \text{ ist geordnetes Paar mit erster Komponente in } A \text{ und zweiter Komponente in } B} \Big) \quad (*)$$

[Denn für jede Menge X folgt aus $X = (a,b) \wedge a \in A \wedge b \in B$, daß

$$X = \{\underbrace{\{a\}}_{\in \mathcal{P}(A \cup B)}, \underbrace{\{a,b\}}_{\in \mathcal{P}(A \cup B)}\} \in \underbrace{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))}_{\text{ist Menge nach } ⑤ \text{ und } ⑥}$$

also ist $(*)$ äquivalent zu

$$A \times B = \underbrace{\{X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid \exists_{a,b} \; X = (a,b) \wedge a \in A \wedge b \in B\}}_{\text{ist Menge nach } ③} \;]$$

Die Menge $A \times B$ heißt das kartesische Produkt von A und B.

Wir schreiben

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

(ii) Für bel. Mengen A, B, C def-en wir $A \times B \times C$ als die eindeutig bestimmte Menge mit

$$\boxed{A \times B \times C} := \underbrace{\underbrace{(A \times B)}_{\text{Menge (n.o.)}} \times C}_{\text{Menge (n.o.)}} = \{((a,b),c) \mid (a,b) \in A \times B \wedge c \in C\}$$

$$= \{(a,b,c) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}.$$

„usw."

2.14 Def. (Relation)

(i) Seien A, B Mengen und $G \subseteq A \times B$ (d.h. G Teilmenge von $A \times B$). Dann heißt das geordnete Tripel $R := (A, G, B)$ eine Relation (von A nach B), im Spezialfall $B = A$ auch eine Relation in A.
Für „$a \in A, b \in B, (a,b) \in G$" sagt man auch „$a$ steht in Relation R zu b" und schreibt dafür auch $\boxed{aRb}$.

Beispiele: 1.) $A = B = \mathbb{R}$, $G_1 := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le b\}$ ($:= \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

$R_1 := (\mathbb{R}, G_1, \mathbb{R})$, aR_1b bedeutet $a \le b$

2.) $A = B = \mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1,2,3,\dots\}$, $G_2 := \{(a,b) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \mid \underbrace{a \text{ teilt } b}_{\Leftrightarrow: \boxed{a \mid b}}\}$

G_2 enthält die folgenden Elemente:

$(1,1), (1,2), (1,3), \dots$
$(2,2), (2,4), (2,6), \dots$
$(3,3), (3,6), (3,9), \dots$
$\vdots$
$(7,7), (7,14), (7,21), \dots$
$\vdots$

$R_2 := (\mathbb{N}_+, G_2, \mathbb{N}_+)$. aR_2b bedeutet $a \mid b$

(ii) Sei $R = (A, G, B)$ eine Relation wie in (i).
Für jede Teilmenge M von A heißt die Menge (vgl. Ax ③)

$\boxed{R[M]} := \{b \in B \mid \exists_{a \in M}\ aRb\}$ (oft auch $\boxed{R(M)}$, vgl. aber 2.15 Bemerkung) das Bild von M unter R
(↑ Menge aller 2. Komponenten von Paaren $(a,b) \in G$ mit 1. Komponente $\in M$)

und für jede Teilmenge N von B heißt die Menge

$\boxed{\bar{R}^{\uparrow}[N]} := \{a \in A \mid \exists_{b \in N}\ aRb\}$ (oft auch $\boxed{\bar{R}^{\uparrow}(N)}$) das Urbild von N unter R
(↑ Menge aller 1. Komponenten von Paaren $(a,b) \in G$ mit 2. Komponente $\in N$)

(iii) Sei $R = (A, G, B)$ eine Relation. Definiert man dann

$$\bar{G}^{\uparrow} := \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in G\},$$

so ist auch $\boxed{\bar{R}^{\uparrow}} := (B, \bar{G}^{\uparrow}, A)$ eine Relation, die sog. zu R inverse Relation. Für $a \in A, b \in B$ gilt $(aRb \Leftrightarrow b\,\bar{R}^{\uparrow}a)$.
Für jede Teilmenge N von B ist das Bild $\bar{R}^{\uparrow}[N]$ von N unter R^{-1} offenbar gleich dem Urbild $\bar{R}^{\uparrow}[N]$ von N unter R, (also gleiche Bezeichnungen gerechtfertigt).

Spezielle Relationen: Abbildungen, Äquivalenzrelationen, Ordnungen (s.u.).

2.15 Def (Abbildung)

(i) Seien A, B Mengen und sei $f = (A, \overset{\cup}{G}, B)$ eine Relation von A nach B. f heißt eine Abbildung (auch Funktion) von A nach B genau dann, wenn gilt:

$$\forall_{a \in A} \underbrace{\exists!_{b \in B}}_{\text{d.h. per def. existiert genau ein } b \in B} a f b .$$

In diesem Fall schreibt man $\boxed{f : A \to B}$

(ii) Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so heißt für jedes $a \in A$ das eindeutig bestimmte $b \in B$ mit afb der Wert von f in a und man schreibt $\boxed{f(a)}$ (oder auch $\boxed{f_a}$) für b.

$\overbrace{\text{d.h. } a \in \mathcal{P}(A)}$

Bemerkung: Es kann sein, daß sowohl $a \in A$ als auch $a \subset A$ gilt. Dann haben, falls $f : A \to B$ eine Abbildung ist,

$\underbrace{f(a)}_{\text{der Wert von } f \text{ in } a \in A}$ und $\underbrace{f[a]}_{\text{das Bild von } a \subset A \text{ unter } f, \text{ vgl. 2.14(ii)}}$

ist es „gefährlich", wie in der „naiven Mengenlehre" üblich, auch die Bildmenge $f[a]$ mit $f(a)$ zu bezeichnen.

Beispiel hierzu: $3 \in \mathbb{N}$ und $\underset{\{0,1,2\}}{3} \subset \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \to B$

$$f[3] = \{f(0), f(1), f(2)\} \underset{\text{i.a.}}{\neq} f(3).$$

Es gilt also für eine Abb. $f : A \to B$ stets $f = (A, G, B)$ mit

$$G = \underbrace{\{(a, f(a)) \mid a \in A\}}_{\text{heißt der Graph von } f} \left(= \{(a,b) \in A \times B \mid b = f(a)\}\right)$$

$\uparrow$ deshalb $\overset{\cup}{G}$

Ist umgekehrt eine „Zuordnungsvorschrift" $a \mapsto h_a$ gegeben die jedem $a \in A$ ein Element $h_a \in B$ zuordnet, so existiert genau eine Abb. $f: A \to B$ mit $\forall_{a \in A}\, f(a) = h_a$, nämlich $f = (A, G, B)$ mit $G = \{(a, h_a) \mid a \in A\} \in \mathcal{P}(A \times B)$.

<u>(iii)</u> Sei $f: A \to B$ eine Abbildung.

f heißt <u>injektiv</u> $:\Longleftrightarrow \forall_{a, \tilde{a} \in A} \left(f(a) = f(\tilde{a}) \Rightarrow a = \tilde{a} \right)$

$\underset{\text{klar}}{\Longleftrightarrow} \forall_{a, \tilde{a} \in A} \left(a \neq \tilde{a} \Rightarrow f(a) \neq f(\tilde{a}) \right)$,

f heißt <u>surjektiv</u> $:\Longleftrightarrow \forall_{b \in B} \exists_{a \in A}\, f(a) = b$

$\underset{\text{klar}}{\Longleftrightarrow} f[A] = B$,

f heißt <u>bijektiv</u> $:\Longleftrightarrow f$ injektiv $\wedge$ f surjektiv

$\underset{\text{klar}}{\Longleftrightarrow} \forall_{b \in B} \exists!_{a \in A}\, f(a) = b$.

5.11.02
(G.)

<u>(iv)</u> Sind $f: A \to B$ und $\tilde{f}: \tilde{A} \to \tilde{B}$ zwei Abbildungen, so gilt (nach 2.12):

$$f = \tilde{f} \Longleftrightarrow \left(A = \tilde{A} \wedge B = \tilde{B} \wedge \forall_{a \in A}\, f(a) = \tilde{f}(a) \right)$$

$\boxed{2.16}$ <u>Def.</u> Für bel. Mengen A, B existiert genau eine Menge $\boxed{B^A}$ mit

$$\forall_X \Big(X \in B^A \Longleftrightarrow \underbrace{X \text{ ist eine Abbildung von } A \text{ nach } B}_{\text{d.h. } X: A \to B} \Big)$$

[Denn für jede Abb. $X: A \to B$ gilt $X = (A, \overset{\mathcal{P}(A \times B)}{\overset{\rotatebox{90}{$\in$}}{G}}, B)$, also $X \in \left(\{A\} \times \mathcal{P}(A \times B) \times \{B\} \right)$, also

$$B^A = \underbrace{\{ X \in \overbrace{(\{A\} \times \mathcal{P}(A \times B) \times \{B\})}^{\text{Menge}} \mid X \text{ ist Abb. von } A \text{ nach } B \}}_{\text{Menge nach } (3)}$$]

2.17 Def. (Weitere Def.-en über Abbildungen)

(i) Sei M eine Menge. Dann heißt die Abbildung $id_M : \begin{matrix} M \to M \\ a \mapsto a \end{matrix}$ die Identität von M.

(ii) Sei $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung, also insbes. f eine Relation von M nach N. Dann ist auch die zu f inverse Relation $\overleftarrow{f}$ von N nach M (vgl. 2.14(iii)) eine Abbildung $\overleftarrow{f} : N \to M$. $\overleftarrow{f} : N \to M$ ist dann ebenfalls bijektiv und heißt die Umkehrabbildung von f.

(iii) Ist $\tilde{M}$ eine Teilmenge der Menge M, so heißt die Abbildung $\begin{matrix} \tilde{M} \to M \\ a \mapsto a \end{matrix}$ die Inklusionsabbildung von $\tilde{M}$ in M. Man bezeichnet diese Abbildung kurz mit $\boxed{\tilde{M} \hookrightarrow M}$.

(iv) Seien $f : M \to N$ und $g : K \to L$ zwei Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$\boxed{g \circ f} : \overbrace{\overleftarrow{f}[N \cap K]}^{\subset M} \to L$$
$$a \mapsto g(\underbrace{f(a)}_{\in K}) =: (g \circ f)(a)$$

die Komposition von f und g.

Beachte: Die Komposition $g \circ f$ zweier beliebiger Abbildungen $f : M \to N$ und $g : K \to L$ ist für uns also stets definiert als Abbildung $\overleftarrow{f}[N \cap K] \to L$. Der Fall $\overleftarrow{f}[N \cap K] = \emptyset$ ist dabei möglich, (dann $g \circ f : \emptyset \to L$).

Für eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ gilt

$$\overleftarrow{f} \circ f = id_M \quad \text{und} \quad f \circ \overleftarrow{f} = id_N .$$

(v) Sei $f: M \to N$ eine Abbildung und $\tilde{M} \subset M$.

Dann heißt die Abbildung $\boxed{f|\tilde{M}}: \tilde{M} \to N$, $a \mapsto f(a)$ die Beschränkung von f auf $\tilde{M}$, also $f|\tilde{M} = f \circ (\tilde{M} \hookrightarrow M)$.

(vi) Sei M eine Menge und sei $(M_i)_{i \in I}$ eine „Familie von Teilmengen von M", d.h. per def.: I ist eine Menge und $I \to \mathcal{P}(M)$, $i \mapsto M_i$ ist eine Abbildung.

Dann heißt die Menge

$$\boxed{\prod_{i \in I} M_i} := \{ \overbrace{f: I \to M \text{ Abbildung}}^{\text{d.h. } f \in M^I} \mid \forall_{i \in I}\, f(i) \in M_i \}$$

das kartesische Produkt der Mengenfamilie $(M_i)_{i \in I}$.

2.18 (Die „letzten" Axiome von ZFC)

(i) Das folgende Axiom (8) werden wir nicht ausnutzen; wir erwähnen es nur der Vollständigkeit halber:

Axiom (8) (Axiom der Ersetzung)

Sei $P(\ldots,\ldots)$ eine zweistellige Aussageform mit der Eigenschaft, daß zu jeder Menge X genau eine Menge Y existiert derart, daß $P(X,Y)$ gilt.

Dann existiert zu jeder Menge A (genau) eine Menge B mit

$$\forall_{\substack{Y \\ (\text{Menge})}} \left(Y \in B \iff \exists_{X \in A} P(X,Y) \right).$$

Die Axiome (1) bis (8) sind alle Axiome der Mengenlehre von Zermelo/Fraenkel, kurz ZF genannt.

(ii) Dagegen werden wir das folgende Axiom (9), das weitreichende Konsequenzen hat (s.u.), gelegentlich benutzen.

Axiom (9) (Auswahlaxiom)

Sei M eine Menge und sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von M mit $\forall_{i\in I} M_i \neq \emptyset$.

Dann gilt $\bigtimes_{i\in I} M_i \neq \emptyset$,

(d.h. es existiert eine Abbildung $f: I \to M$ mit $\forall_{i\in I} f(i)\in M_i$).

Die Axiome (1) bis (9) sind alle Axiome der Mengenlehre ZFC von Zermelo/Fraenkel mit Auswahlaxiom.

2.19 Def. (Äquivalenzrelation)

Sei A eine Menge und sei R eine Relation in A

(i) R heißt reflexiv $:\Leftrightarrow \forall_{a\in A}\ aRa$,

R heißt symmetrisch $:\Leftrightarrow \forall_{a,b\in A}(aRb \Rightarrow bRa)$

R heißt transitiv $:\Leftrightarrow \forall_{a,b,c\in A}(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$

(ii) R heißt eine Äquivalenzrelation (auf A)

$:\Leftrightarrow R$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Für „aRb" sagt man dann auch „a ist äquivalent zu b modulo R".

(iii) Sei R eine Äquivalenzrelation auf A. Dann heißt für jedes $a\in A$

$$[a]_R := \{x\in A \mid \underbrace{xRa}_{\Leftrightarrow aRx}\} \subset A$$

die Äquivalenzklasse von a modulo R und es existiert genau eine Menge

$$A/R = \{[a]_R \in \mathcal{P}(A) \mid a\in A\} \subset \mathcal{P}(A)$$

↑ Menge aller Äquivalenzklassen modulo R

Nach Übung 14 und Übung 16 ist A disjunkte Vereinigung der verschiedenen Äquivalenzklassen.

Die Abbildung $P : A \longrightarrow A/R$, $a \longmapsto [a]_R$, die jedem Element von A seine Äquivalenzklasse modulo R zuordnet, heißt kanonische Projektion. P ist also surjektiv.

2.20 Beispiel: Sei $f: M \to N$ eine Abbildung.
Dann existiert genau eine Äquivalenzrelation R_f auf M mit

$$\forall_{a,b \in M} \left(a R_f b \iff f(a) = f(b) \right).$$

[Reflexivität: $f(a) = f(a)$,
Symmetrie: $f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a)$,
Transitivität: $f(a) = f(b) \wedge f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c)$]

weitere Beispiele: vgl. Übungen

2.21 Satz Seien M eine Menge, R eine Äquivalenzrelation auf M und $f: M \to N$ eine Abbildung mit

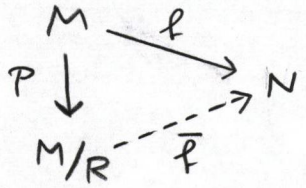
$$\forall_{a,b \in M} \left(a R b \Rightarrow f(a) = f(b) \right) \qquad (1)$$

(hier steht nicht $\iff$ wie in 2.20)

Dann existiert genau eine Abbildung $\overline{f}: M/R \longrightarrow N$ mit

$$f = \overline{f} \circ P, \qquad (2)$$

(d.h. per def.: „Das Diagramm



ist kommutativ")

Beweis: Existenz: Sei $X \in M/R$. Es existiert $a \in M$ mit $\underbrace{X = P(a) = [a]_R}_{\text{d.h. } a \in X}$ und für beliebige $a, b \in M$ mit $\overbrace{X = P(a) = P(b)}^{\text{d.h. } a \in X \wedge b \in X}$ gilt
$[a]_R \quad [b]_R$

aRb und folglich nach (1): $f(a) = f(b)$. Derhalb wird durch

$$\forall_{X \in M/R} \quad \bar{f}(X) := f(a) \quad , \text{ falls } a \in X \text{ bel.},$$

eine eindeutig bestimmte Abbildung $\bar{f}: M/R \to N$ definiert und es gilt $\forall_{a \in A} \; \bar{f}(P(a)) = f(a)$, d.h. $\bar{f} \circ P = f$.

Eindeutigkeit: Ist auch $\tilde{f}: M/R \to N$ eine Abbildung mit $\tilde{f} \circ P = \left(f \underset{\text{s.o.}}{=}\right) \bar{f} \circ P$, so folgt aus der Surjektivität von P sofort $\tilde{f} = \bar{f}$, q.e.d.

2.22 Def.: (Ordnung, geordnete Menge)

Sei A eine Menge und sei R eine Relation in A.

(i) R heißt antisymmetrisch $:\Leftrightarrow \forall_{a,b \in A} \underbrace{(aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)}_{\text{d.h. im Falle } a \neq b \text{ gilt nie zugleich } aRb \text{ und } bRa}$

(ii) R heißt eine Ordnung von A

$:\Leftrightarrow R$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

In diesem Fall heißt $\underbrace{(A, R)}_{\text{geordnetes Paar}}$ eine geordnete Menge.

Für eine Ordnung von A verwendet man oft Symbole wie $\leq$ oder $\preceq$.

Also, falls $(A, \leq)$ geordnete Menge:

$\forall_{a,b,c \in A} \quad a \leq a, \; (a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b),$

$\underbrace{(a \leq b \wedge b \leq c}_{\Leftrightarrow: a \leq b \leq c} \Rightarrow a \leq c)$,

aber i.a. nicht $a \leq b$ oder $b \leq a$.

(iii) Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge und seien $a, b \in A$.

a und b heißen miteinander vergleichbar (bzgl. $\leq$)

$:\Leftrightarrow a \leq b$ oder $b \leq a$.

2.23 Beispiele

1.) $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ sind geordnete Mengen

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, ($\leq$ wie üblich).

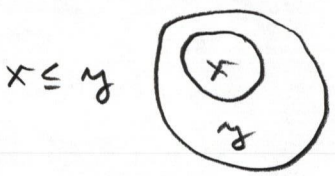
Je zwei Zahlen aus $\mathbb{N}, \ldots, \mathbb{R}$ sind miteinander vergleichbar.

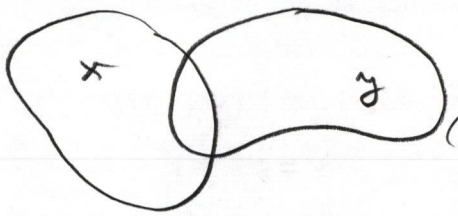
2.) Sei A eine Menge. Dann ist $(A, \subset_A)$ eine geordnete Menge, wobei

$$\forall_{x,y \in A} \left(x \subset_A y :\Leftrightarrow x \subset y \right).$$

z.B. $A = \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$, d.h. die Elemente von A sind Teilmengen von $\mathbb{R}^2$

$\leq := \subset_{(\mathfrak{P}(\mathbb{R}^2))}$





weder $x \leq y$ noch $y \leq x$, (d.h. x und y nicht miteinander vergleichbar)

3.) $(\mathbb{N}_+, \underset{\sim}{G_2})$ ist eine geordnete Menge

wie in 2.14(i):

$$\forall_{m,n \in \mathbb{N}_+} \left(m G_2 n :\Leftrightarrow \underbrace{m \text{ teilt } n}_{m|n} \right)$$

Es gilt weder $5|7$, noch $7|5$, d.h. 5 und 7 nicht miteinander vergleichbar.

4.) Für jede Menge A ist $\overbrace{id_A : A \to A}^{\text{ist zweist. Relation in } A}$ eine Ordnung von A, d.h. (A, id_A) ist eine geordnete Menge.

Dabei sind je zwei Elemente $a, b \in A$ mit $a \neq b$ nicht miteinander vergleichbar bzgl. id_A.

2.24 Def. (Totalordnung, totalgeordnete Menge)

Sei A eine Menge und sei $\leq$ eine Ordnung von A.

$\leq$ heißt eine **Totalordnung von A** genau dann, wenn je zwei Elemente von A vergleichbar sind bzgl. $\leq$.

In diesem Fall heißt $(A, \leq)$ eine **total geordnete Menge**.

Beispiele: $(\mathbb{R}, \leq)$ ist totalgeordnet,

$(\mathbb{N}_+, G_2)$, $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subset)$ sind nicht total geordnet.

Warnung: In der Literatur oft $\left\{\begin{matrix}\text{Teilordnung}\\ \text{Ordnung}\end{matrix}\right\}$ statt hier $\left\{\begin{matrix}\text{Ordnung}\\ \text{Totalordnung}\end{matrix}\right\}$.

2.25 Def.: (wird im Beweis von 2.28 gebraucht, deshalb an dieser Stelle) Sei X eine Menge

(i) Eine Folge in X ist per def. eine Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow X$.

Für eine Abbildung $a: \mathbb{N} \longrightarrow X$ mit $\forall_{n \in \mathbb{N}}\, a(n) = a_n$ verwendet man oft das Symbol $\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}}$.

(ii) Sei $f: X \to X$ eine Abbildung und sei $a \in X$ beliebig.

Dann existiert (hierfür kein Beweis in dieser Vorlesung) genau eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit

$$a_0 = a \quad \text{und} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}\, a_{n+1} = f(a_n),$$

(also $a_1 = f(a)$, $a_2 = f(f(a))$, $a_3 = f(f(f(a)))$ usw.)

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt eine **durch f rekursiv definierte Folge**.

neues Thema: Größenvergleich von Mengen, Mächtigkeit

2.26 **Def.** Seien A, B Mengen. Wir definieren dann

(i) $\boxed{\#A = \#B}$ $:\Longleftrightarrow$ Es existiert eine bijektive Abbildung $A \longrightarrow B$

in Worten:

„A und B sind gleichmächtig"

oder

„Die Mächtigkeit (= Kardinalzahl) von A ist gleich der Mächtigkeit (= Kardinalzahl) von B"

((Wir erklären nicht „#A" allein, sondern nur „#A = #B")))

(ii) $\boxed{\#A \leq \#B}$ $:\Longleftrightarrow$ Es existiert eine injektive Abbildung $A \longrightarrow B$

„Die Mächtigkeit von A ist kleiner gleich der Mächtigkeit von B"

Beispiele: 1.) Für natürliche Zahlen n, k gilt (hierfür kein Beweis in dieser Vorlesung, folgt durch vollst. Induktion):

$$\underbrace{\#n \leq \#k}_{(=)} \Longleftrightarrow \underset{(=)}{n \leq k}$$

$\Longleftrightarrow$ Es existiert eine injektive (bijektive) Abbildung $n \longrightarrow k$ ($\{0,1,\dots,n-1\}$ bzw. $\{0,1,\dots,k-1\}$)

$\Longleftrightarrow$ klar " " " $\{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,k\}$

2.) $\#\mathbb{Q} \leq \#\mathbb{R}$ (denn $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv), aber $\neg(\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{R})$ (denn $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar, vgl. Analysis-Vorlesung).

3.) Eine Menge A heißt **endlich**, wenn eine natürliche Zahl n existiert mit $\#A = \#n$. In diesem Fall ist n nach 1.) eindeutig bestimmt und man schreibt auch $\boxed{\#A = n}$ und nennt A n-elementig.

Eine Menge heißt **unendlich**, wenn sie nicht endlich ist.

2.27 Satz

Für beliebige Mengen A, B, C gilt:

(a) $\#A = \#A$,

(b) $\#A = \#B \implies \#B = \#A$,

(c) $(\#A = \#B) \wedge (\#B = \#C) \implies \#A = \#C$.

Beweis: klar (z.B. folgt (c) daraus, daß die Komposition einer bijektiven Abbildung $f: A \to B$ mit einer bijektiven Abbildung $g: B \to C$ eine bijektive Abbildung $g \circ f: A \to C$ ist.)

Bemerkung: Der letzte Satz besagt, daß $\sim$ mit

$$\forall_{A,B} \left(A \sim B :\Longleftrightarrow \#A = \#B \right)$$

alle Eigenschaften einer Äquivalenzrelation besitzt (Reflexivität, Symmetrie, Transitivität).

Unser nächstes Ziel ist der Beweis des „Äquivalenzsatzes von Bernstein" (1897), oft auch „Cantor-Bernsteinscher Satz" genannt.

2.28 Satz (Äquivalenzsatz von Bernstein)

Für je zwei Mengen A, B gilt:

$$(\#A \leq \#B) \wedge (\#B \leq \#A) \implies \#A = \#B ,$$

d.h.:

Existieren sowohl eine injektive Abbildung $A \to B$ als auch eine injektive Abbildung $B \to A$, so existiert auch eine bijektive Abbildung $A \to B$.

12.11.02 (8.) Beim Beweis von 2.28 benötigen wir das folgende Lemma:

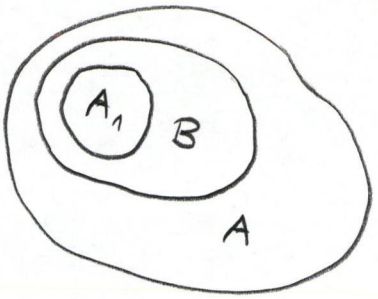
2.29 Lemma

Für beliebige Mengen A, B, A_1 mit

$$A_1 \subset B \subset A \quad \text{und} \quad \# A_1 = \# A$$

gilt

$$\# B = \# A .$$



Beweis (des Lemmas): Nach Vor. existiert eine bijektive Abbildung $f: A \longrightarrow A_1$.

Offenbar existiert genau eine Abbildung

$$F: \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \quad \text{mit} \quad \forall_{\substack{X \in \mathcal{P}(A) \\ (\text{d.h. } X \subset A)}} \; F(X) = \underset{\substack{\cap \\ A_1 \\ \cap \\ A}}{f[X]} .$$

Nach 2.25(ii) existieren Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(A)$ mit

$$\left.\begin{aligned} A_0 = A \quad &\text{und} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \; A_{n+1} = F(A_n) = f[A_n] , \\ B_0 = B \quad &\text{und} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \; B_{n+1} = F(B_n) = f[B_n] . \end{aligned}\right\} (1)$$

Dann gilt

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \; A_{n+1} \subset B_n \subset A_n \qquad (2)$$

[Zu (2): Vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

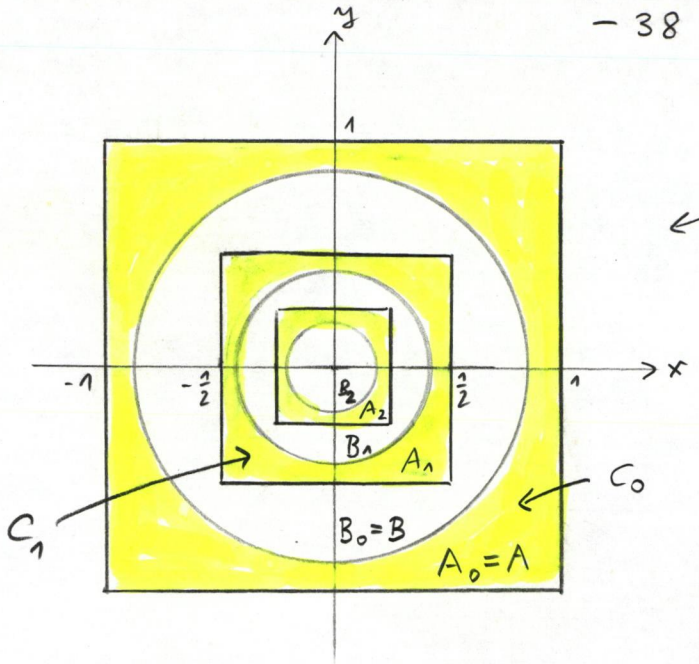
Für $n = 0$ ist (2) klar nach Vor. und (1): $A_1 \subset \overset{\overset{B}{\shortparallel}}{B_0} \subset \overset{\overset{A}{\shortparallel}}{A_0}$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und (2) gelte für n, d.h. $A_{n+1} \subset B_n \subset A_n$.

Dann folgt mittels (1) offenbar

$$\underset{\substack{\shortparallel (1) \\ A_{n+2}}}{f[A_{n+1}]} \subset \underset{\substack{\shortparallel (1) \\ B_{n+1}}}{f[B_n]} \subset \underset{\substack{\shortparallel (1) \\ A_{n+1}}}{f[A_n]} ,$$

also gilt (2) auch für $n+1$.]



(Skizze betrifft den Spezialfall

$A = [-1,1]^2$, $A_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2 \subset \mathbb{R}^2$

$A_1 \subset \underbrace{B}_{\text{Kreisscheibe um } (0,0)} \subset A$

$f(x,y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$)

Wir setzen

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad C_n := A_n \setminus B_n \in \mathfrak{P}(A) \qquad (3)$$

und

$$C := \dot{\bigcup_{n=0}^{\infty}} C_n \text{, d.h. per def.: } C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n := \bigcup \{C_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ und } C_n \cap C_k = \emptyset \text{ für } n < k \qquad (4)$$

disjunkte Vereinigung

[Denn für $n, k \in \mathbb{N}$, $n < k$, d.h. $n+1 \leq k$, gilt

$C_k \underset{(3)}{\subset} A_k$ und $C_n \underset{(3)}{\subset} A \setminus \underbrace{B_n}_{\underset{(2)}{\supset} A_{n+1} \underset{(2)}{\supset} A_k} \subset A \setminus A_k$.]

Aus (3) folgt:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad f[C_n] \underset{(3)}{=} f[A_n \setminus B_n] \underset{\text{da } f \text{ injektiv, vgl. Übungen}}{=} f[A_n] \setminus f[B_n] \underset{(1)}{=} A_{n+1} \setminus B_{n+1} \underset{(3)}{=} C_{n+1}, \qquad (5)$$

also folgt aus (4):

$$f[C] \underset{(4)}{=} f\left[\dot{\bigcup_{n=0}^{\infty}} C_n\right] \underset{\text{vgl. Übgn, } f \text{ injektiv}}{=} \dot{\bigcup_{n=0}^{\infty}} \underbrace{f[C_n]}_{\underset{\text{(5)}}{=} C_{n+1}} = C \setminus C_0 \qquad (6)$$

disjunkte Vereinigung nach (4)

Mit f ist auch $f|C$ injektiv, also ist nach (6)

$f|C : C \longrightarrow C \setminus C_0$ eine bijektive Abbildung,
$a \mapsto f(a)$

ferner ist trivialerweise $id_{A\setminus C} : A \setminus C \longrightarrow A \setminus C$ eine bijektive Abbildung

Wegen $C \cup (A \setminus C) = A$ und

$$(C \setminus C_0) \cup (A \setminus C) = A \setminus C_0 \underset{(1),(3)}{=} A_0 \setminus (A_0 \setminus B_0) \underset{(1)}{=} B_0 \underset{(1)}{=} B$$

existiert daher offenbar genau eine bijektive Abbildung $g : A \longrightarrow B$ mit

$$\bigwedge_{a \in A} g(a) = \begin{cases} f(a) & , \text{ falls } a \in C \\ a & , \text{ falls } a \in A \setminus C \end{cases} , \quad \text{q.e.d.}$$

Beweis von 2.28 (Äquivalenzsatz von Bernstein):

Seien also A, B Mengen mit $\#A \leq \#B$ und $\#B \leq \#A$.

Dann existieren also injektive Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to A$, also ist auch $g \circ f : A \to A$ eine injektive Abbildung (nach Übung 13(i)) und es gilt

$$(g \circ f)[A] \underset{\text{als Übung}}{=} g[\underbrace{f[A]}_{\subset B}] \subset g[B] \subset A$$

Wegen $\#(g \circ f)[A] = \#A$ (↑ $g \circ f$ bildet A bijektiv auf $(g \circ f)[A]$ ab) folgt daher nach Lemma 2.29, daß

$$\#\, g[B] = \#A$$

Wegen $\#\, g[B] = \#B$ (↑ g bildet B bijektiv auf $g[B]$ ab) folgt hieraus schließlich nach 2.27, daß

$$\#A = \#B \quad , \quad \text{q.e.d.}$$

2.30 Satz

Für bel. Mengen A, B, C gilt:

(a) $\#A \leq \#A$,

(b) (Äquivalenzsatz von Bernstein):

$$(\#A \leq \#B) \wedge (\#B \leq \#A) \Rightarrow \#A = \#B$$

(c) $(\#A \leq \#B) \wedge (\#B \leq \#C) \Rightarrow \#A \leq \#C$.

Beweis: Zu (a): klar, da $id_A : A \to A$ injektiv

Zu (b): s.o. 2.28

Zu (c): klar, da Komposition injektiver Abbildungen injektiv, q.e.d.

Bemerkungen: 1.) Der letzte Satz besagt, daß $\leq$ in $(\#A \leq \#B)$ alle Eigenschaften einer Ordnung besitzt (Reflexivität, Antisymmetrie, Transitivität).

2.) Unter Benutzung des Auswahlaxioms (9) läßt sich ferner zeigen (schwieriger Satz der Mengenlehre, nicht in dieser Vorlesung), daß für bel. Mengen A, B auch gilt:

(d) $(\#A \leq \#B)$ oder $(\#B \leq \#A)$,

(d.h. es existiert eine injektive Abbildung $A \to B$ oder eine injektive Abbildung $B \to A$),

d.h. $\leq$ in $(\#A \leq \#B)$ besitzt sogar alle Eigenschaften einer Totalordnung.

2.31 Satz („Satz von Cantor")

Für jede Menge A gilt $\#A < \#\mathcal{P}(A)$

d.h. per def. $(\#A \leq \#\mathcal{P}(A)) \wedge \neg(\#A = \#\mathcal{P}(A))$

Beweis: $\#A \leq \#\mathcal{P}(A)$ gilt nach Übung 9(i) ($A \to \mathcal{P}(A)$ ist $a \mapsto \{a\}$ injektive Abb.).

Nach Übung 9(ii) existiert keine surjektive, also erst recht keine bijektive Abbildung $A \to \mathcal{P}(A)$, also gilt $\neg(\#A = \#\mathcal{P}(A))$, q.e.d.

2.32 Lemma

Für jede Menge A gilt $\boxed{\#\mathcal{P}(A) = \#(2^A)}$

(2^A: Menge aller Abbildungen $A \longrightarrow 2$, $2 = \{0,1\}$)

Beweis: vgl. Übungen (leicht)

2.33 Satz $\boxed{\#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})}$

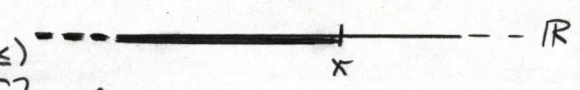
Beweis: Nach dem Äquivalenzsatz von Bernstein 2.28 genügt es zu zeigen, daß

$$\#\mathbb{R} \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad (1) \qquad \text{und} \qquad \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq \#\mathbb{R} \quad (2).$$

Zu (1): Offenbar ist die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$$

$$x \longmapsto \underbrace{\{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}}_{\text{in } (\mathbb{R}, \leq)\ =\ ]-\infty, x[\ \cap\ \mathbb{Q}} =: f(x)$$



(dabei wichtig, daß $\mathbb{Q}$ dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist)

injektiv, also gilt

$$\#\mathbb{R} \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{Q}) = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$$

(wegen $\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$ (auf Grund der Abzählb. von $\mathbb{Q}$))

Zu (2): Nach 2.32 genügt es zum Nachweis von (2) zu zeigen, daß

$$\#(2^{\mathbb{N}}) \leq \#\mathbb{R} \quad (\tilde{2}).$$

Beweis von $(\tilde{2})$: Jedes $a \in 2^{\mathbb{N}}$ ist eine Folge $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Menge $2 = \{0,1\}$, d.h. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (a_n = 0 \text{ oder } a_n = 1)$

Wir definieren $g: 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(a) := a_0, a_1 a_2 \ldots\ldots \quad \text{(Dezimalentwicklung)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n 10^{-n}$$

Bekanntlich ist g injektiv, womit $(\tilde{2})$ gezeigt ist

(Beachte: So etwas wie $0{,}999\ldots = 1{,}000\ldots$ kann nicht auftreten, da alle Ziffern $\in \{0,1\}$.)

2.34 Bemerkung:

Wir setzen in dieser Nr. 2.34 das Auswahlaxiom voraus. Dann sind also nach 2.30 (d) je zwei Mengen hinsichtlich ihrer Mächtigkeit vergleichbar.

(i) Aus 2.31 und 2.33 folgt

$$\#\mathbb{N} < \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \#\mathbb{R}$$ (vgl. Übung 21 (ii)), also gilt auch $\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$

Es ist nun interessant zu fragen, ob es eine Menge gibt, deren Mächtigkeit größer als die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen und zugleich kleiner als die Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen ist
(heißt „das Kontinuum")

Die sog. (spezielle) Kontinuumshypothese, kurz KH, sagt aus, daß es keine solche Menge gibt.

Gödel bewies 1939: Aus den Axiomen ① bis ⑨ läßt sich kein Widerspruch zur Kontinuumshypothese ableiten, genauer: Aus der Widerspruchsfreiheit von ① bis ⑨ folgt die Widerspruchsfreiheit von ①, ..., ⑨, KH („Verträglichkeit" von KH mit ZFC)

Cohen bewies 1963: Aus den Axiomen ① bis ⑨ läßt sich die Kontinuumshypothese auch nicht ableiten, genauer: Aus der Widerspruchsfreiheit von ① bis ⑨ folgt auch die Widerspruchsfreiheit von ①, ..., ⑨, ¬KH (Negation von KH) („Unabhängigkeit" von KH von ZFC)

(ii) Die verallgemeinerte Kontinuumshypothese (generell), kurz GKH, sagt aus, daß für jede unendliche Menge A gilt (vgl. den Satz von Cantor 2.31): Es gibt keine Menge, deren Mächtigkeit echt zwischen der Mächtigkeit von A und der Mächtigkeit von $\mathcal{P}(A)$ liegt. Auch GKH ist sowohl verträglich mit ZFC als auch unabhängig von ZFC.

Wir erwähnen ohne Beweis noch einen nichttrivialen Satz über Mächtigkeiten von Mengen (benutzt Auswahlaxiom):

2.35 Satz ((A endlich oder unendlich))

Seien A, B zwei Mengen mit $\#A \leq \#B$, $A \neq \emptyset$, B unendlich. Dann gilt:

(i) $\#(A \cup B) = \#B$,

(ii) $\#(A \times B) = \#B$.

Bemerkungen: 1.) Der Spezialfall $A = B$ von (ii) besagt

$$\#(B \times B) = \#B \text{ für jede unendliche Menge } B \quad (*)$$

In den Fällen $B = \mathbb{N}$ und $B = \mathbb{R}$ können wir (*) beweisen [Denn $\#(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \#\mathbb{N}$ gilt wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (vgl. Analysis-Vorlesung) und $\#(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \#\mathbb{R}$ gilt nach Übung 22(i).]

2.) Die Vor. „B unendlich" ist wesentlich:
Im Falle $\#B = k \in \mathbb{N}_+$, $\#A = n \in \mathbb{N}_+$, $n \leq k$, gilt nämlich offenbar:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \#(A \cup B) = n + k > k,$$
$$n \geq 2 \Rightarrow \#(A \times B) = n\,k > k$$

---

nächstes Ziel: Formulierung des „Zorn'schen Lemmas"

grundlegendes Resultat der Mengenlehre, wird in vielen Teilen der Mathematik bei Existenzbeweisen benötigt

2.36 **Def.** Seien $(A, \leq)$ eine geordnete Menge, B eine Teilmenge von A und $b \in B$.

(i) b heißt **größtes Element von B (bzgl. $\leq$)**

$$:\Leftrightarrow \forall_{x \in B} \underbrace{b \geq x}_{\text{d.h. } x \leq b}$$

d.h. b ist $\geq$ allen Elementen von B, (insbes. b mit allen Elementen von B vergleichbar)

Falls ein größtes Element von B existiert, so ist dieses eindeutig bestimmt.

[Denn falls sowohl $b \in B$ als auch $\tilde{b} \in B$ größtes Element von B, so gilt $\tilde{b} \leq b$ und $b \leq \tilde{b}$, folglich $b = \tilde{b}$.]

(ii) b heißt **maximales Element von B (bzgl. $\leq$)**

$$:\Leftrightarrow \text{Es existiert kein } x \in B \text{ mit } \underbrace{x > b}_{\text{d.h. } x \geq b \text{ und } x \neq b}$$

d.h. kein Element von B ist $> b$, d.h. b ist $\geq$ allen Elementen von B, mit denen es vergleichbar ist

Ein größtes Element von B ist trivialerweise auch ein maximales Element von B, die Umkehrung gilt i.a. nicht (s.u.)

Analoge Definitionen und Aussagen für **kleinstes Element von B** und **minimales Element von B**.

Beispiele: Sei $(\mathbb{N}_+, G_2)$ die geordnete Menge wie in 2.14 (i) ($m G_2 n$ bedeutet $m \mid n$)

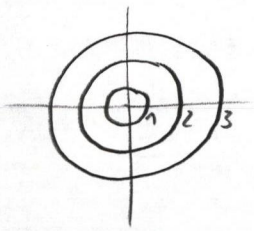
1.) 1 ist kleinstes Element von $\mathbb{N}_+$ bzgl. G_2, (denn $\forall_{m \in \mathbb{N}_+} 1 \mid m$)
Es existiert kein größtes Element von $\mathbb{N}_+$ bzgl. G_2 (klar).

2.) $B := \mathbb{N}_+ \setminus \{1\} = \{2, 3, 4, \dots\}$ besitzt kein kleinstes Element bzgl. G_2 (2 ist nicht kleinstes Element, da z.B. $2 \nmid 5$)
B hat unendlich viele minimale Elemente bzgl. G_2, denn die Menge der minimalen Elemente bzgl. G_2 ist offenbar gerade die Menge der Primzahlen.

2.37 Def.: Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge und sei B eine Teilmenge von A
B heißt eine Kette $(\text{in } (A, \leq))$ $:\Leftrightarrow$ Je zwei Elemente von B sind miteinander vergleichbar bzgl. $\leq$

Beispiele: 1.) $\{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$ ist eine Kette in $(\mathbb{N}_+, \underset{\text{in zuletzt}}{G_2})$

2.) $\{\mathcal{U}_1(0), \mathcal{U}_2(0), \mathcal{U}_3(0), \dots\}$ ist eine Kette in $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subset)$



Bemerkungen: 1.) Ist die geordnete Menge $(A, \leq)$ sogar totalgeordnet, so stimmen die Begriffe „größtes (kleinstes) Element" und „maximales (minimales) Element" überein und jede Teilmenge B von A ist dann eine Kette
2.) Ist B eine Kette $(\text{in}(A, \leq))$ und ist $b \in B$ maximales (minimales) Element von B, so ist b auch größtes (kleinstes) Element von B (klar).

2.38 **Def.:** Seien $(A, \leq)$ eine geordnete Menge, $B \subset A$ und $a \in A$ ((nicht notwendig $a \in B$!))

(i) a heißt obere Schranke von B (in $(A, \leq)$)

$$:\Leftrightarrow \forall_{x \in B}\ a \geq x$$

(ii) a heißt Supremum von B (in $(A, \leq)$)

$:\Leftrightarrow$ a ist kleinstes Element von $\{\tilde{a} \in A \mid \tilde{a}$ obere Schranke von B (in $(A, \leq)$)$\}$

Menge aller oberen Schranken von B (in $(A, \leq)$)

Falls ein Supremum von B existiert, so ist dieses eindeutig bestimmt und man bezeichnet es mit $\boxed{\sup B}$ ((eigentlich genauer $\sup_{(A,\leq)} B$))

Analoge Definitionen und Aussagen für untere Schranke von B und Infimum von B $(= \boxed{\inf B})$

Beispiel: Sei M eine Menge. Dann ist $(\mathcal{P}(M), \subset)$ eine geordnete Menge

Sei $B \subset \mathcal{P}(M)$ beliebig. Dann besitzt B ein Supremum, nämlich

$$\sup B = \bigcup B \in \mathcal{P}(M).$$

$$= \bigcup_{N \in B} N$$

2.39 Satz („Zorn'sches Lemma")

Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge mit der Eigenschaft, daß jede Kette in $(A, \leq)$ eine obere Schranke in $(A, \leq)$ besitzt.

Dann existiert (mindestens) ein maximales Element von A bzgl. $\leq$

(Beweis mittels Auswahlaxiom, aus Zeitgründen nicht in dieser Vorlesung)

19.11.02 (10.)

2.40 Def. (Wohlordnung)

Sei A eine Menge und $\leq$ eine Totalordnung von A

$\leq$ heißt dann per def. eine Wohlordnung von A genau dann, wenn gilt:

Jede nichtleere Teilmenge B von A besitzt ein kleinstes Element bzgl. $\leq$

In diesem Fall heißt $(A, \leq)$ eine wohlgeordnete Menge

Beispiel Unter den totalgeordneten Mengen $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq), (\mathbb{R}, \leq)$ ist nur $(\mathbb{N}, \leq)$ wohlgeordnet

Mittels Auswahlaxiom läßt sich zeigen (nicht möglich in dieser Vorlesung):

2.41 Satz („Wohlordnungssatz")

Jede Menge A läßt sich wohlordnen,

(d.h. es existiert eine Wohlordnung von A).

§ 3 Gruppen, Ringe, Körper

3.1 **Def.:** (i) Eine **Gruppe** ist ein Paar $(G, \cdot)$, bestehend aus einer Menge G und einer Abbildung

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G, \quad (a, b) \longmapsto \underbrace{a \cdot b}_{\text{kurz } ab}$$

← („multiplikative Schreibweise")

mit folgenden Eigenschaften:

(G1) $\forall_{a,b,c \in G} \; (ab)c = a(bc)$ (Assoziativgesetz)

(G2) Es existiert ein Element $e \in G$ mit

$$\forall_{a \in G} \; ea = a \; (*) \qquad \forall_{a \in G} \exists_{a' \in G} \; a'a = e \; (**)$$

$e \in G$ mit dieser Eigenschaft heißt **neutrales Element**

(ii) Eine Gruppe $(G, \cdot)$ heißt **abelsch** (oder kommutativ), wenn zusätzlich

(G3) $\forall_{a,b \in G} \; ab = ba$ (Kommutativgesetz).

Bemerkungen Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt

1.) Das neutrale Element $e \in G$ ist eindeutig bestimmt und erfüllt sogar

$$\forall_{a \in G} \; ea = \underline{\underline{ae}} = a \qquad (\tilde{*})$$

2.) Es gilt sogar

$$\forall_{a \in G} \; \exists!_{a' \in G} \; a'a = \underline{\underline{aa'}} = e \qquad (\tilde{**})$$

Man schreibt $\bar{a}^1$ für a' und nennt $\bar{a}^1$ das zu a inverse Element. Es gilt stets $(\bar{a}^1)^{-1} = a$.

[Beweis: a) Sei e ein neutrales Element, sei $a \in G$ und sei $a' \in G$ nach (**) gewählt mit $a'a = e$. Dann folgt (falls $a'' \in G$ nach (**) gewählt mit $a''a' = e$):

$$aa' \underset{(*)}{=} e(aa') = (a''a')(aa') \underset{Ass.}{=} a''(\underbrace{a'(aa')}) \underset{Ass}{=} a''(\underbrace{(a'a)a'})$$

$$= a''(\underbrace{ea'}) \underset{(*)}{=} a''a' = e,$$

also auch

$$ae = a(a'a) = \underbrace{(aa')}_{e \text{ "} \leftarrow \text{gerade gezeigt}} a = ea \underset{(*)}{=} a.$$

b) Sind e, e_* zwei neutrale Elemente, so folgt nach a)

$$e e_* = (e_* e =) e_* \quad \text{und} \quad (e_* e =) e e_* = e,$$

also $e = e_*$.

c) Ist e das nach b) eindeutig bestimmte neutrale Element und sind $a \in G$ sowie $a_1', a_2' \in G$ mit $a_1'a = a_2'a = e$. Dann folgt nach a) auch $a a_1' = (a a_2' =) e$ und $a_2'e = a_2'$, also auch

$$a_1' \underset{(*)}{=} e a_1' = (\underbrace{a_2'a}) a_1' \underset{Ass.}{=} a_2'(\underbrace{aa_1'}) = a_2'e = a_2'$$

Damit sind 1.) und 2.) gezeigt bis auf die letzte Aussage von 2.) Diese ist klar wegen

$$(\bar{a}^{-1})^{-1} \underset{n.o.}{=} (\bar{a}^{-1})^{-1} e \underset{(*)}{=} (\bar{a}^{-1})^{-1}(\underbrace{\bar{a}^{-1}a}) \underset{Ass.}{=} (\underbrace{(\bar{a}^{-1})^{-1}\bar{a}^{-1}})a = ea = a.]$$

3.) Das neutrale Element einer (multiplikativ geschriebenen) Gruppe G wird oft auch das <u>Einselement</u> genannt und mit 1_G oder kurz mit 1 bezeichnet.

Bei einer abelschen Gruppe wird die Verknüpfung oft als Addition $(a,b) \mapsto a+b$ geschrieben; das neutrale Element wird bei additiver Schreibweise auch das <u>Nullelement</u> genannt und mit 0_G oder kurz mit 0 bezeichnet, das zu a inverse Element wird mit $-a$ bezeichnet, ferner setzt man $\underline{a-b} := a+(-b)$.

„Differenz von a und b"

3.2 Beispiele (für Gruppen)

1.) additive Gruppen: $(\mathbb{R},+), (\mathbb{Q},+), (\mathbb{Z},+), (\{0\},+)$

multiplikative Gruppen: $(\underbrace{\mathbb{R}^*}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}},\cdot), (\mathbb{Q}^*,\cdot), (\{-1,1\},\cdot)$,

$(\underbrace{\mathbb{R}_+}_{:=\{a\in\mathbb{R},\, a>0\}},\cdot), (\mathbb{Q}_+,\cdot), (\{1\},\cdot)$

keine Gruppe: $(\mathbb{Z}^*,\cdot)$

2.) Für eine bel. Menge $M\neq\emptyset$ ist $(S(M),\circ)$ eine Gruppe, wobei

$$S(M) := \{f \mid \underbrace{f: M\to M \text{ bijektiv}}_{\text{d.h. perdef.: „}f\text{ Permutation von }M\text{"}}\},$$

insbesondere $\overset{\wedge}{M^M}$

$\forall_{f,g\in S(M)}\quad f\circ g \in S(M)$

Verknüpfung von g und f $\quad (M \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} M)$, $f\circ g$: $M\to M$

Das neutrale Element dieser Gruppe ist id_M,
das zu $f\in S(M)$ inverse Element ist die zu f inverse Abbildung $\bar{f}$ $\quad (M \underset{\bar{f}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} M)$, vgl. Übungen.

$(S(M),\circ)$ heißt die Permutationsgruppe von M

3.) Für jedes $n\in\mathbb{N}_+$ heißt

$$\boxed{S_n} := (S(\{1,\dots,n\}),\circ)$$

die symmetrische Gruppe (auch Permutationsgruppe) zum Index n

Ein Element $\sigma\in S_n$, d.i. eine bijektive Abbildung
$\sigma: \{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$, $i\mapsto \sigma(i)=\sigma_i$, heißt eine Permutation von $1,\dots,n$.

Man schreibt für σ:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix},$$

auch kurz

$$\sigma = (\sigma_1\ \sigma_2\ \cdots\ \sigma_n).$$

3.3 Satz

Sei $\underbrace{G}_{\text{genauer } (G,\cdot)}$ eine Gruppe. Dann gilt:

(i) („Kürzungsregel")

$$\forall_{a,b,c \in G} \; (ac = bc \Rightarrow a = b) \text{ und}$$
$$\text{“} \quad (ca = cb \Rightarrow a = b)$$

(ii) („Uneingeschränkte Durchführbarkeit der Division")

$$\forall_{a,b \in G} \; \exists!_{c \in G} \quad ac = b \quad \text{und}$$
$$\text{“} \quad \text{“} \quad ca = b$$

Beweis: Zu (i) Aus $ac = bc$ folgt

$$(ac)\bar{c}^{-1} = (bc)\bar{c}^{-1}, \quad \text{also } a = b \quad \text{Rest analog}$$
$$\text{“} \qquad \text{“}$$
$$a(c\bar{c}^{-1}) \qquad b(c\bar{c}^{-1})$$
$$\text{“} \qquad \text{“}$$
$$ae \qquad be$$
$$\text{“} \qquad \text{“}$$
$$a \qquad b$$

Zu (ii): Seien $a,b \in G$. Angen. $c \in G$ erfüllt $ac = b$. Dann folgt

$$\bar{a}^{-1}(ac) = \bar{a}^{-1}b, \quad \text{also } c \text{ eind. bestimmt und } c = \bar{a}^{-1}b.$$
$$\text{“}$$
$$(\bar{a}^{-1}a)c$$
$$\text{“}$$
$$ec$$
$$\text{“}$$
$$c$$

Wegen $a(\bar{a}^{-1}b) = (a\bar{a}^{-1})b = eb = b$ ist die erste Aussage von (ii) gezeigt. Rest analog, q.e.d.

3.4 Beispiel

(Bestimmung aller Gruppen mit 3 Elementen)

Sei G eine Gruppe mit den drei (verschiedenen) Elementen e, a, b (e neutrales Element)

Gruppentafel:

1. \ 2.	e	a	b
e	e	a	b
a	a	$\boxed{b}$	$\textcircled{e}$
b	b	$\textcircled{e}$	$\boxed{a}$

Es gilt $ab = e$ (Denn aus $ab = \overbrace{a}^{a} \cdot e$ bzw. $ab = e \cdot \overbrace{b}^{b}$ folgt nach 3.3 (i): $b = e$ bzw. $a = e$ im Widerspruch dazu, daß e, a, b verschieden)

Analog folgt $ba = e$.

Aus 3.3 (ii) folgt, daß in jeder der drei Zeilen und jeder der drei Spalten der Gruppentafel jedes der drei Elemente e, a, b genau einmal auftritt. Hieraus folgt schließlich

$$aa = b \quad \text{und} \quad bb = a$$

Damit gezeigt: Wenn es eine Gruppe mit 3 Elementen gibt, so ist sie durch die obige Gruppentafel gegeben.

Tatsächlich definiert die Gruppentafel eine Gruppe. Die Assoziativität folgt z.B. aus

$$\overbrace{(a \cdot a)}^{a^3} \cdot a = ba$$

$$a = a^1, \quad b = a^2 (:= a \cdot a), \quad e = a^3,$$

$$(a^m a^n) a^k = a^{m+n+k} = a^m (a^n a^k).$$

3.5 Def.

Seien $\underbrace{(G, \cdot)}_{G}$ und $\underbrace{(H, \cdot)}_{H}$ Gruppen.

Eine Abbildung $f: G \to H$ heißt ein <u>Gruppen-Homomorphismen</u> genau dann, wenn

$$\forall_{a,b \in G} \quad f(ab) = f(a) f(b).$$

Ein bijektiver Gruppen-Homomorphismus $f: G \to H$ heißt ein <u>Gruppen-Isomorphismus</u>.

Ist $f: G \to H$ ein Gruppen-Isomorphismus, so ist auch die Umkehrabbildung $\bar{f}^{-1}: H \to G$ ein Gruppen-Homom. (d.h. Gruppen-Isom.)

[Denn für alle $c, d \in H$ gilt

$$f\left(\bar{f}^{-1}(cd)\right) = (f \circ \bar{f}^{-1})(cd) = id_H(cd) = cd$$

$$= f(\bar{f}^{-1}(c)) \cdot f(\bar{f}^{-1}(d)) \underset{\uparrow}{=} f\left(\bar{f}^{-1}(c)\,\bar{f}^{-1}(d)\right),$$

f Gruppen-Hom.

also folgt aus der Injektivität von f:

$$\bar{f}^{-1}(cd) = \bar{f}^{-1}(c)\,\bar{f}^{-1}(d) \;]$$

Beispiel: $\exp: (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot)$ ist ein Gruppen-Isomorph. mit Umkehr-Isomorph. $\ln: (\mathbb{R}_+, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$, da stets

$$\exp(s+t) = \exp(s)\exp(t),$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y,$$

(vgl. Analysis).

3.6 Def. (i) Ein Ring ist per def. ein Tripel $\underbrace{(R,+,\cdot)}_{\text{kurz: } R}$, bestehend aus einer Menge R und zwei Abbildungen

$+ : R \times R \to R$, $(a,b) \mapsto a+b$ (Addition) und $\cdot : R \times R \to R$, $(a,b) \mapsto a \cdot b = ab$ (Multiplikation)

mit folgenden Eigenschaften:

(R1) $(R,+)$ ist eine abelsche Gruppe (mit $0_R = 0$ als neutralem Element) ← Nullelement des Rings

(R2) $\forall_{a,b,c \in R} \; (ab)c = a(bc)$ (Assoziativgesetz der Mult.)

(R3) $\forall_{a,b,c \in R}$ $\left.\begin{array}{l} a(b+c) = ab + ac \\ \text{und} \\ (a+b)c = \underbrace{ac + bc}_{:=(ac)+(bc)} \end{array}\right\}$ (Distributivgesetze)

Motto: „Punktrechnung geht vor Strichrechnung"

(ii) Ein Ring R heißt kommutativ, wenn zusätzlich

$$\forall_{a,b \in R} \quad ab = ba$$

Für einen kommutativen Ring ist eines der Distributivgesetze (R3) überflüssig, (es folgt aus dem anderen).

(iii) Ein Ring mit Einselement (oder unitärer Ring) ist ein Ring, der ein neutrales Element $1_R = 1$ bzgl. Multiplikation besitzt, d.h.

$$\forall_{a \in R} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Bemerkungen: Sei $R \left(= (R,+,\cdot)\right)$ ein Ring.

1) Das zu $a \in R$ inverse Element bzgl. Addition wird mit $-a$ bezeichnet.

Für alle $a,b \in R$ heißt $a - b := a + (-b)$ die Differenz von a und b

2.) Für alle $a, b, c \in R$ gilt

$$a\,0 = 0\,a = 0 \,, \tag{1}$$

$$a(-b) = (-a)b = \underbrace{-ab}_{:=-(ab)} \text{ und } (-a)(-b) = ab \,, \tag{2}$$

$$a(b-c) = ab - ac \text{ und } (a-b)c = ac - bc \,. \tag{3}$$

[Zu (1): $a\,0 = a(\underbrace{0+0}_{=0}) \overset{(R3)}{=} a\,0 + a\,0$, also nach 3.3(i): $a\,0 = 0$ (Rest analog)

Zu (2): $ab + (-ab) = 0 \underset{(1)}{=} a\,0 = a(\underbrace{b+(-b)}_{=0}) = ab + a(-b)$,

also nach 3.3(i): $a(-b) = -ab$

$(-a)b = -ab$ folgt analog

$(-a)(-b) \overset{\text{gerade gezeigt, } (-a \text{ statt } a)}{=} -(\underbrace{-a)b}_{\to\, -ab}) = -(-ab) \overset{ab+(-ab)=0}{=} ab$

Zu (3): $a(b-c) = a(b+(-c)) \underset{(R3)}{=} ab + \underbrace{a(-c)}_{=-ac \text{ (2)}} = ab - ac$, Rest analog.]

3.7 Def. Sei $K = (K, +, \cdot)$ ein Ring, $K^* := K \setminus \{0\}$

K heißt **Körper**, wenn zusätzlich gilt:

$(K^*, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe,

(d.h. wenn K ein kommutativer Ring mit Einselement $1 \neq 0$ ist und wenn gilt

$$\forall_{a \in K^*} \exists_{b \in K^*} \; ab = 1 \,)$$

Also: Ein Körper ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge K und zwei Abbildungen $+ : K \times K \to K$, $(a,b) \mapsto a+b$ und $\cdot : K \times K \to K$, $(a,b) \mapsto ab$ mit folgenden Eigenschaften:

(K1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe,

(K2) $(K^*, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe $(K^* = K \setminus \{0\})$,

(K3) $\forall_{a,b,c \in K} \; a(b+c) = ab + ac$.

3.8 Beispiele (für Ringe)

1.) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ sind kommutative unitäre Ringe, $(n\mathbb{Z},+,\cdot)$ $(n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$ mit

$$n\mathbb{Z} = \{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots\}$$

ist ein kommutativer Ring ohne Einselement.

$(\{0\},+,\cdot)$ ist ebenfalls ein Ring, „der" Nullring.

2.) (Der Restklassenring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$, wobei $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$)

Nach Übung 14(i) wird durch

$$\forall_{r,s\in\mathbb{Z}} \left(\underbrace{r R_n s}_{r\equiv s \bmod n} :\Longleftrightarrow n \text{ teilt } r-s, \text{ d.h. } r-s\in n\mathbb{Z} \right)$$

eine eindeutig bestimmte Äquivalenzrelation R_n auf $\mathbb{Z}$ definiert. Die Äquivalenzklasse $\overline{r} = [r]_{R_n}$ von $r\in\mathbb{Z}$ ist gleich

$$\overline{r} = r + n\mathbb{Z} = \{r + n m \mid m\in\mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$$

↑ heißt Restklasse von r modulo n (genauer $\overline{r}^{(n)}$ statt $\overline{r}$)

Auf der n-elementigen Menge

$$\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \underbrace{\mathbb{Z}/R_n}_{\{\overline{r}\mid r\in\mathbb{Z}\}} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

klar nach Ü 26(i), wonach $\forall_{r\in\mathbb{Z}} \exists!_{s\in\{0,1,\dots,n-1\}} r\in s+n\mathbb{Z}$

können wir eine Addition und eine Multiplikation auf $\mathbb{Z}_n$ auf genau eine Weise so def.-en, daß für alle $r,s\in\mathbb{Z}$

$$\overline{r}+\overline{s} = \overline{r+s} \quad (*) \qquad \text{und} \qquad \overline{r}\,\overline{s} = \overline{rs} \quad (**)$$

[Zur Wohldefiniertheit von $+ : \mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_n$ und von $\cdot : \mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_n$ mit $(*)$, $(**)$:

Aus $\overline{r_1}=\overline{r}$, $\overline{s_1}=\overline{s}$ folgt $r_1 = r+nk$, $s_1 = s+n\ell$ mit $k,\ell\in\mathbb{Z}$

und daher

$$r_1 + s_1 = r + s + n\underbrace{(k+\ell)}_{\in \mathbb{Z}} \equiv r + s \bmod n$$

und

$$r_1 s_1 = rs + n\underbrace{(r\ell + sk + n k \ell)}_{\in \mathbb{Z}} \equiv rs \bmod n ,$$

also

$$\overline{r_1 + s_1} = \overline{r+s} \quad \text{und} \quad \overline{r_1 s_1} = \overline{rs} \;]$$

Wir behaupten:

$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement $\overline{1}$

wie in (*), (**)

$\overline{0}$ ist das Nullelement, es gilt $-\overline{r} = \overline{-r}$ (für alle $r \in \mathbb{Z}$)

[Beweis hiervon:

Zu (R1): Aus $(r+s)+t = r+(s+t)$ in $\mathbb{Z}$ folgt

$$\overline{(r+s)+t} = \overline{r+(s+t)} \text{ in } \mathbb{Z}_n .$$

$$\overline{r+s} + \overline{t} \qquad \overline{r} + \overline{s+t}$$

$$(\overline{r}+\overline{s})+\overline{t} \qquad \overline{r}+(\overline{s}+\overline{t})$$

aus $0 + r = r$ folgt $\overline{0+r} = \overline{r}$, aus $-r + r = 0$ folgt $\overline{-r+r} = \overline{0}$,

$\overline{0}+\overline{r}$ $\qquad$ $\overline{-r}+\overline{r}$

aus $r+s = s+r$ folgt $\overline{r+s} = \overline{s+r}$

$\overline{r}+\overline{s}$ $\qquad$ $\overline{s}+\overline{r}$

Zu (R2): Aus $(rs)t = r(st)$ in $\mathbb{Z}$ folgt $\overline{(rs)t} = \overline{r(st)}$ in $\mathbb{Z}_n$

$$\overline{rs}\,\overline{t} \qquad \overline{r}\,\overline{st}$$

$$(\overline{r}\overline{s})\overline{t} \qquad \overline{r}(\overline{s}\overline{t})$$

Zu (R3): Aus $r(s+t) = rs + rt$ in $\mathbb{Z}$ folgt $\overline{r(s+t)} = \overline{rs + rt}$ in $\mathbb{Z}_n$,

$$\overline{r}\,\overline{s+t} \qquad \overline{rs} + \overline{rt}$$

$$\overline{r}(\overline{s}+\overline{t}) \qquad \overline{r}\overline{s} + \overline{r}\overline{t}$$

aus $1 r = r$ in $\mathbb{Z}$ folgt $\overline{1}\,\overline{r} = \overline{r}$ in $\mathbb{Z}_n$, q.e.d.]

3.) (Der Polynomring $R[t]$, wobei R unitärer kommutativer Ring)

Sei R ein unitärer kommutativer Ring.

$$R^{(\mathbb{N})} := \{a \in R^{\mathbb{N}} \mid a_i = 0 \text{ für fast alle } i \in \mathbb{N}\}$$

Menge aller Folgen in R mit nur endlich vielen Folgengliedern $\neq 0_R$.

Wir notieren $a \in R^{(\mathbb{N})}$ mit $a_i = 0$ für alle $i > n$ als den „formalen Ausdruck"

$$a = \underbrace{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n}_{\sum_{i=0}^{n} a_i t^i} = \underbrace{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots}_{\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i}$$

und setzen $R[t] := R^{(\mathbb{N})}$.

Seien $a, b \in R[t]$, $a = a_0 + a_1 t + \ldots$, $b = b_0 + b_1 t + \ldots$.

Wir definieren dann $a+b$, $ab \in R[t]$ durch

$$\left.\begin{aligned} a+b &= (a_0 + a_1 t + \ldots) + (b_0 + b_1 t + \ldots) \\ &:= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)t + (a_2+b_2)t^2 + \ldots, \end{aligned}\right\} (*)$$

und

$$\left.\begin{aligned} ab &= (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots) \\ &:= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)t^2 + \ldots, \end{aligned}\right\} (**)$$

Motto: „ausrechnen mittels Distributivgesetz" „und ordnen nach t-Potenzen"

d.h.

$$\forall_{i \in \mathbb{N}} \quad (a+b)_i := a_i + b_i \qquad (\tilde{*})$$

$$(ab)_i := a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \ldots + a_i b_0 \qquad (\tilde{**})$$

$$= \sum_{\substack{k,\ell \in \mathbb{N} \\ k+\ell = i}} a_k b_\ell$$

Wir behaupten:

$(R[t], +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Nullelement $0 = (0,0,0,\ldots)$ und mit Einselement $1 = (1,0,0,\ldots)$.

$R[t]$ heißt der Polynomring über R (in einer Variablen).

Die Elemente von $R[t]$ heißen Polynome.

[Beweis hiervon: (R1) und (R3) sind klar nach (*) und (**).

Zu (R2): Für $a, b, c \in R[t]$ gilt (Beweis selbst als Übung):

$$\forall_{i \in \mathbb{N}} \left((ab)c\right)_i = \sum_{\substack{k+\ell+m \\ = i}} a_k b_\ell c_m = \left(a(bc)\right)_i \text{, q.e.d.}]$$

3.9 Beispiele (für Körper)

1.) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Körper.

2.) Für jede Primzahl p ist der Restklassenring

$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper (vgl. Übungen)
(vgl. 3.8 2.)

Insbesondere existiert also für jede Primzahl p ein endlicher Körper mit p Elementen.

3.10 Def.:

(i) Seien $\overbrace{(R, +, \cdot)}^{R}$, $\overbrace{(\tilde{R}, +, \cdot)}^{\tilde{R}}$ Ringe (z.B. Körper)

Eine Abbildung $f: R \to \tilde{R}$ heißt ein Ring-Homomorphismus genau dann, wenn

$$\forall_{a,b \in R} \; f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ und } f(ab) = f(a)f(b).$$

Ein bijektiver Ring-Homom. heißt ein Ring-Isomorphismus.

Mit $f: R \to \tilde{R}$ ist auch $f^{-1}: \tilde{R} \to R$ ein Ring-Isomorphismus (folgt wie bei Gruppen-Hom.-en in 3.5)

Beispiel: $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a \mapsto \bar{a}$ ist ein Ring-Homom. (klar nach 3.8 2.))

(ii) Eine Teilmenge $R_1 \overset{\neq}{\subset} R$ eines Ringes $R = (R, +, \cdot)$ heißt ein Unterring von R genau dann, wenn auch $(R_1, +, \cdot)$ ein Ring ist.

Dies ist (vgl. hierzu Übung 24) genau dann der Fall, wenn

$$\forall_{a,b \in R_1} \; \underbrace{a-b}_{:= a+(-b)} \in R_1 \text{ und } ab \in R_1$$

Beispiel: $\forall_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ (n \geq 2)}} \; n\mathbb{Z}$ ist Unterring von $\mathbb{Z}$.

(viii) Eine Teilmenge $K_1 \subset K$ eines Körpers $K = (K, +, \cdot)$ heißt ein Unterkörper von K genau dann, wenn auch $(K_1, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Dies ist genau dann der Fall, wenn $0_K, 1_K \in K_1$ und

$$\forall_{a,b \in K_1} \; a - b \in K_1 \quad \text{und} \quad \forall_{a,b \in K_1^*} \; a b^{-1} \in K_1^*.$$

Beispiele:

$\mathbb{Q}$ ist Unterkörper von $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ " " " $\mathbb{C}$

$\mathbb{Q}$ " " " $\underbrace{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$

$:= \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ (vgl. Aufg. 28)

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ " " " $\mathbb{R}$

§ 4 Vektorräume und lineare Abbildungen

4.1 Def.: Sei $K = (K, \oplus, \odot)$ ein Körper (mit Nullelement $0_K = 0$ und Einselement $1_K = 1$).
($\oplus$: Addition in K, $\odot$: Multipl. in K)

Ein **K-Vektorraum** (auch **Vektorraum über K**) ist per def. ein Tripel $V = (V, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge V und zwei Abbildungen

$$+ : V \times V \longrightarrow V \quad \text{(Vektoraddition)}$$
$$(v, w) \mapsto v + w$$

und

$$\cdot : K \times V \longrightarrow V \quad \text{(skalare Multiplikation)}$$
$$(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

mit folgenden Eigenschaften:

(V1) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe

(V2) Für alle $v, w \in V$ (lateinische Buchstaben) und alle $\lambda, \mu \in K$ (griechische Buchstaben) gilt

$$1_K \cdot v = v \quad , \qquad (1)$$

(Assoziativitätsgesetz der skalaren Mult.)
$$(\lambda \odot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \quad , \qquad (2)$$

(Distributivgesetze der skalaren Mult.)
$$\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \quad , \qquad (3)$$
$$(:= (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w))$$
$$(\lambda \oplus \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \quad . \qquad (4)$$

(Beachte: Es ist keine Vektormultiplikation $V \times V \longrightarrow V$, $(v, w) \mapsto vw$ erklärt!)

Bemerkungen Sei V ein K-Vektorraum (wie in der Def.)

1.) Das neutrale Element von $(V, +)$ heißt das **Nullelement von V** und wird mit $0_V = 0$ bezeichnet.

Das zu $v \in V$ inverse Element in $(V,+)$ wird mit $-v$ bezeichnet. Die Elemente von V heißen <u>Vektoren</u>, die Elemente von K heißen <u>Skalare</u>.

2.) Für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in K$ gilt:

$$0_K \cdot v = 0_V, \tag{5}$$

$$\lambda \cdot 0_V = 0_V, \tag{6}$$

$$(\ominus\lambda)\cdot v = \underbrace{-\lambda\cdot v}_{:=-(\lambda\cdot v)} = \lambda\cdot(-v) \quad \text{und} \quad (\ominus 1_K)\cdot v = -v, \tag{7}$$

$$\lambda \cdot v = 0 \Rightarrow \lambda = 0_K \text{ oder } v = 0_V \tag{8}$$

$$\lambda\cdot(\underbrace{v-w}_{:=v+(-w)}) = \lambda\cdot v - \lambda\cdot w. \tag{9}$$

[Zu (5): $0_K\cdot v + 0_K\cdot v \underset{(4)}{=} \underbrace{(0_K \oplus 0_K)}_{=0_K}\cdot v = 0_K\cdot v\,(+\,0_V)$,

also (nach 3.3 (a')): $0_K\cdot v = 0_V$

Zu (6): $\lambda\cdot 0_V + \lambda\cdot 0_V \underset{(3)}{=} \lambda\cdot(\underbrace{0_V+0_V}_{=0_V}) = \lambda\cdot 0_V\,(+\,0_V)$, also $\lambda\cdot 0_V = 0_V$

Zu (7): $(\ominus\lambda)\cdot v + \lambda\cdot v \underset{(4)}{=} \underbrace{(\ominus\lambda\oplus\lambda)}_{=0_K}\cdot v = 0_K\cdot v \underset{(5)}{=} 0_V$,

also $(\ominus\lambda)\cdot v = -\lambda\cdot v$

$\lambda\cdot(-v) + \lambda\cdot v \underset{(3)}{=} \lambda\cdot(\underbrace{-v+v}_{=0_V}) = \lambda\cdot 0_V \underset{(6)}{=} 0_V$,

also $\lambda\cdot(-v) = -\lambda\cdot v$

$(\ominus 1_K)\cdot v \overset{!}{=} -(\underbrace{1_K\cdot v}_{\underset{(1)}{=}v}) = -v$

Zu (8): Sei $\lambda\cdot v = 0$ und gelte $\lambda \neq 0_K$. Dann folgt

$\underbrace{\bar{\lambda}^{-1}\cdot(\underbrace{\lambda\cdot v}_{=0_V})}_{\overset{(6)}{=}0_V} \underset{(2)}{=} (\underbrace{\bar{\lambda}^{-1}\odot\lambda}_{=1_K})\cdot v = 1_K\cdot v \underset{(1)}{=} v$, also $v = 0_V$.

Zu (9): $\lambda \cdot (\underbrace{v-w}_{:= v+(-w)}) \underset{(3)}{=} \lambda \cdot v + \underbrace{\lambda \cdot (-w)}_{\underset{-\lambda \cdot w}{\overset{(7)}{=}}} = \lambda \cdot v - \lambda \cdot w$, q.e.d.]

3.) Man schreibt meist einfach $\lambda + \mu$ für $\lambda \oplus \mu$, $\lambda \mu$ für $\lambda \odot \mu$ und λv für $\lambda \cdot v$.

4.2 Beispiele (für K-Vektorräume)

1.) Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}_+ (n \geq 2)$.

$K^n :=$ Menge aller Abbildungen $v: \{1, \dots, n\} \to K$ (statt $\{0, \dots, n-1\} = n$)

$i \mapsto v_i$

Wir schreiben $v = (v_1, \dots, v_n)$ (oder auch $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ oder $v = v_1 \dots v_n$)

29.11.02 (13.)

K^n ist offenbar ein K-Vektorraum mit der Vektoraddition

$$(v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n) := (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$$

und der skalaren Multiplikation

$$\lambda (v_1, \dots, v_n) := (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n).$$

2.) (Verallgemeinerung von 1.)):

Sei M eine beliebige Menge

Dann ist die Menge K^M aller Abbildungen $f: M \to K$ in kanonischer Weise ein K-Vektorraum, dessen Addition und skalare Multiplikation def. sind durch

$$\forall_{f, g: M \to K,\ \lambda \in K} \quad \forall_{p \in M} \quad (f+g)(p) := f(p) + g(p), \quad (\lambda f)(p) := \lambda f(p).$$

3.) Sei K ein Körper

Dann ist $K[t]$ (vgl. 3.8, 3.)) ein K-Vektorraum mit der Ring-Addition als Addition und mit der skalaren Multipl.

$$\lambda (\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots) := \lambda \alpha_0 + (\lambda \alpha_1) t + (\lambda \alpha_2) t^2 + \dots,$$

d.h. $\lambda (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) := (\lambda \alpha_0, \lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots)$.

4.3 Def.: Sei V ein K-Vektorraum (K bel. Körper) (mitunter nicht mehr hingeschrieben, obwohl stets gemeint)

Eine nichtleere Teilmenge $W \subset V$ heißt ein **Untervektorraum von V** (auch: **linearer Unterraum von V**) genau dann, wenn

$$\underbrace{\forall_{w,\tilde{w}\in W}\; w+\tilde{w}\in W}_{\Rightarrow\ \forall_{w_1,\dots,w_r\in W}\; w_1+\dots+w_r\in W} \quad (*) \qquad \text{und} \qquad \underbrace{\forall_{\lambda\in K}\ \forall_{w\in W}\; \lambda w\in W}_{\text{d.h. „}W\text{ abgeschlossen bzgl. skalarer Multiplikation“}} \quad (**)$$

(vollst. Ind.)

d.h. „W abgeschlossen bzgl. Addition“

Ein Untervektorraum W eines K-Vektorraums V ist stets ebenfalls ein K-Vektorraum

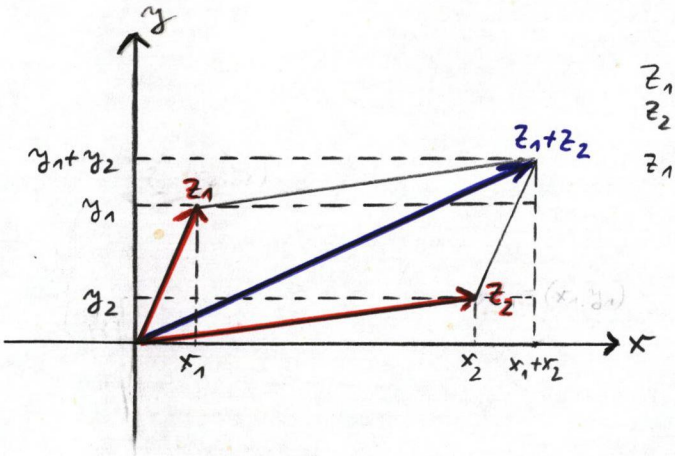
[Denn wegen $W\neq\emptyset$ existiert $w\in W$, also gilt $0_V \overset{4.1(7)}{=} 0_K w \overset{(**)}{\in} W$, ferner

$\forall_{w\in W}\ \underbrace{-w}_{\text{Inverses zu } w\in V \text{ in } (V,+)} \overset{4.1(7)}{=} (-1_K)w \overset{(**)}{\in} W$, also auch

$\forall_{w,\tilde{w}\in W}\ w-\tilde{w} = w+\underbrace{(-\tilde{w})}_{\in W\ (*)} \in W$, folglich $(W,+)$ Untergruppe von $(V,+)$. Rest klar.]

4.4 Beispiele

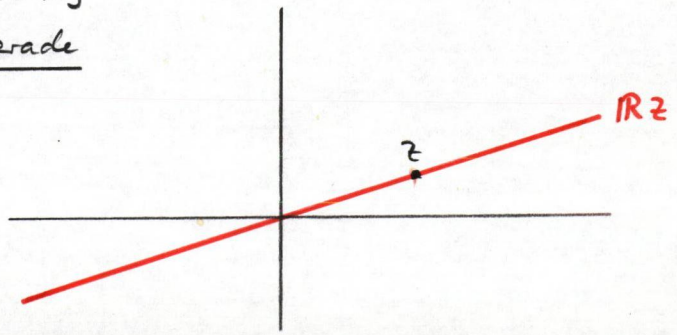
1) $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum



$z_1=(x_1,y_1)$
$z_2=(x_2,y_2)$
$z_1+z_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$

$z\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \Rightarrow \mathbb{R}z := \{\lambda z \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$ ist Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ (klar)

↑ heißt eine **Gerade**

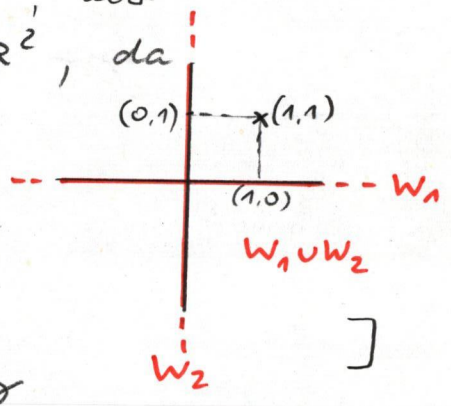


2.) Sei V ein K-Vektorraum, sei I eine Menge und sei für jedes $i \in I$ W_i ein Untervektorraum von V. Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} W_i \subset V$ ein Untervektorraum von V. Dagegen ist $\bigcup_{i \in I} W_i \subset V$ i.a. kein Untervektorraum von V.

[Beweis: Aus $v, \tilde{v} \in \bigcap_{i \in I} W_i$ und $\lambda \in K$ folgt $\forall_{i \in I}\ v, \tilde{v} \in W_i$, also auch $v + \tilde{v}, \lambda v \in W_i$, d.h. $v + \tilde{v}, \lambda v \in \bigcap_{i \in I} W_i$.

$W_1 :=$ x-Achse $= \mathbb{R}(1,0)$ und $W_2 :=$ y-Achse $= \mathbb{R}(0,1)$ sind Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$, aber $W_1 \cup W_2$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$, da

$$(1,1) = \underbrace{(1,0)}_{\in W_1 \subset W_1 \cup W_2} + \underbrace{(0,1)}_{\in W_2 \subset W_1 \cup W_2} \notin W_1 \cup W_2$$



]

3.) Sei V ein K-Vektorraum und sei $M \subset V$. Dann existiert ein kleinster Untervektorraum $\boxed{\text{Span}\, M}$ von V, der M als Teilmenge enthält, nämlich

$$\text{Span}\, M = \{\underbrace{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r}_{\text{heißt eine Linearkombination von } v_1, \ldots, v_r \text{ (über } K\text{)}} \mid r \in \mathbb{N}_+,\ v_1, \ldots, v_r \in M,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K\}$$

[Beweis: Die rechte Menge $\{\ \}$ ist ein Untervektorraum von V mit $M \subset \{\ \}$, da aus $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$, $v_1, \ldots, v_r \in M$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$, $w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_s w_s$, $w_1, \ldots, w_s \in M$, $\mu_1, \ldots, \mu_s \in K$ folgt, daß

$$v + w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r + \underbrace{\mu_1}_{=\lambda_{r+1}} \underbrace{w_1}_{=v_{r+1}} + \ldots + \underbrace{\mu_s}_{=\lambda_{r+s}} \underbrace{w_s}_{=v_{r+s}} \in \{\ \} \text{ und}$$

$$\lambda v = \underbrace{(\lambda \lambda_1)}_{\in K} v_1 + \ldots + \underbrace{(\lambda \lambda_r)}_{\in K} v_r \in \{\ \},$$

ferner $\forall_{v \in M}\ v = 1_K \cdot v \in \{\ \}$.

Ist nun W ein bel. Untervektorraum von V mit $M \subset W$, so folgt $\{\} \subset W$ wegen

$$\forall_{\substack{v_1,\dots,v_r \in M \\ \lambda_1,\dots,\lambda_r \in K}} \underbrace{\lambda_1 \underbrace{v_1}_{\in M \subset W}}_{\in W} + \dots + \underbrace{\lambda_r \underbrace{v_r}_{\in M \subset W}}_{\in W} \in W \quad]$$

M heißt ein <u>Erzeugendensystem von V (über K)</u> genau dann, wenn $\operatorname{Spann} M = V$.

Ist M ein Erzeugendensystem von V und $M \subset \tilde{M} \subset V$, so ist (erst recht) auch $\tilde{M}$ ein Erzeugendensystem von V (trivial)

4.5 <u>Def.:</u> Sei V ein K-Vektorraum.

<u>(i)</u> Sei $r \in \mathbb{N}_+$ und seien $v_1,\dots,v_r \in V$.

$v_1,\dots,v_r$ heißen <u>linear unabhängig (über K)</u>

$$:\Leftrightarrow \forall_{\lambda_1,\dots,\lambda_r \in K} \left(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0_V \Rightarrow \overbrace{\lambda_i = 0_K \text{ für } i = 1,\dots,r}^{\forall_{i \in \{1,\dots,r\}} \lambda_i = 0_K} \right)$$

(d.h. 0_V läßt sich nur in trivialer Weise, d.h. als $0_V = 0_K v_1 + \dots + 0_K v_r$, als Linearkombination von $v_1,\dots,v_r$ darstellen)

Dann gilt also:

$v_1,\dots,v_r$ <u>linear abhängig</u> $:\Leftrightarrow \neg$ ($v_1,\dots,v_r$ linear unabhängig)

$$\Leftrightarrow \exists_{\lambda_1,\dots,\lambda_r \in K} \left(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0_V \wedge \exists_{i \in \{1,\dots,r\}} \lambda_i \neq 0_K \right)$$

$$\underset{\text{s.u.}}{\overset{(*)}{\Leftrightarrow}} \exists_{i \in \{1,\dots,r\}} v_i \in \operatorname{Spann}\{v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_r\}$$

[Zu (*): „$\Rightarrow$" Sei $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0_V$ und gelte $\lambda_i \neq 0$, $i \in \{1,\dots,r\}$.

Dann folgt

$$0_V = \lambda_i^{-1} \cdot 0_V = \lambda_i^{-1} (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) \overset{4.1(3)}{=} \lambda_i^{-1} (\lambda_1 v_1) + \dots + \lambda_i^{-1} (\lambda_r v_r)$$

$$\overset{4.1(2)}{=} \underbrace{(\lambda_i^{-1} \lambda_1)}_{=:\mu_1} v_1 + \dots + \underbrace{(\lambda_i^{-1} \lambda_i)}_{=1_K} v_i + \dots + \underbrace{(\lambda_i^{-1} \lambda_r)}_{=:\mu_r} v_r ,$$

$$\overset{4.1(1)}{=} v_i$$

$$v_i = -\mu_1 v_1 - \dots - \mu_{i-1} v_{i-1} - \mu_{i+1} v_{i+1} - \dots - \mu_r v_r$$

$$\in \operatorname{Spann}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_r\}.$$

„$\Leftarrow$": Aus $v_i \in \operatorname{Spann}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_r\}$ folgt die Existenz von $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots \lambda_r \in K$ mit

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_r v_r,$$

also

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \underbrace{(-1_K)}_{\neq 0} \overbrace{v_i}^{-v_i} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_r v_r = 0_V \Big]$$

3.12.02 (14.)

(ii) Sei $M \overset{*}{\subset} V$.

M heißt <u>linear unabhängig (über K)</u>

$$:\Leftrightarrow \forall_{r \in \mathbb{N}_+} \forall_{\substack{v_1, \dots, v_r \in M \\ \text{voneinander} \\ \text{verschieden}}} \; v_1, \dots, v_r \text{ linear unabhängig.}$$

Ist $M \subset V$ linear unabhängig und $N \overset{\neq \emptyset}{\subset} M$, so ist (erst recht) auch N linear unabhängig.

Ist daher $M \subset V$ eine endliche Teilmenge, $M = \{v_1, \dots, v_r\}$, $v_1, \dots, v_r$ voneinander verschieden, so gilt:

M ist linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $v_1, \dots v_r$ linear unabhängig
$\{v_1, \dots v_r\}$

M heißt <u>Basis von V (über K)</u> $:\Leftrightarrow$ M ist ein Erzeugendensystem von V und M ist linear unabhängig

4.6 Satz Seien V ein K-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}_+$, $v_1, \dots, v_n$ voneinander verschiedene Elemente von V und $M := \{v_1, \dots, v_n\}$. Dann sind folgende vier Aussagen paarweise äquivalent:

(1) M ist eine Basis von V (d.h. M ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V) vgl 4.5 (vi)

(2) M ist ein Erzeugendensystem von V und $\forall_{i \in \{1,\dots,n\}}$ $M \setminus \{v_i\}$ ist kein Erzeugendensystem von V (d.h. „M ist ein minimales Erzeugendensystem von V")

(3) Zu jedem $v \in V$ existieren eindeutig bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit
$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n .$$

(4) M ist linear unabhängig und $\underbrace{\forall_{v \in V} \; v_1, \dots, v_n, v \text{ linear abhängig}}_{\text{d.h. } \forall_{v \in V \setminus M} \; M \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig}}$

(d.h. „M ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V")

Beweis: „(1) $\Rightarrow$ (2)": Angenommen es existiert $i \in \{1, \dots, n\}$ derart, daß $M \setminus \{v_i\} = \underbrace{\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots v_n\}}_{\text{kurz: } \{v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\}}$ Erzeugendensystem von V.

Dann existieren $\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n \in K}_{\text{kurz: } \lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \lambda_n \in K}$ mit

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \hat{\lambda_i} v_i + \dots + \lambda_n v_n ,$$

also gilt

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \underbrace{(-1_K)}_{\neq 0_K} \overbrace{v_i}^{-v_i} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$$

wegen $(-1_K)(-1_K) = 1_K \neq 0_K = (-1_K) \cdot 0_K$

↯ zu Widerspruch dazu, daß M linear unabhängig

„(2) $\Rightarrow$ (3)": Angenommen es gilt (2) und $\neg$(3). Dann existiert $v \in V$ mit

$$v = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\lambda_j}_{\in K} v_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mu_j}_{\in K} v_j \quad \text{und} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Dann existiert weiter ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $\lambda_i \neq \mu_i$, also $\lambda_i - \mu_i \neq 0_K$, und es folgt

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \mu_j) v_j = 0_V , \text{ also auch } \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_i - \mu_i}}_{=: \alpha_j} v_j = 0_V , \quad \alpha_i = 1_K ,$$

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} (-\alpha_j) v_j \in \mathrm{Spann}\{v_1, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_m\}$$

Mit $M = \{v_1, \ldots, v_m\}$ ist daher offenbar auch $M \setminus \{v_i\}$ ein Erzeugendensystem von V im Widerspruch zu (2).

„(3) $\Rightarrow$ (4)": M ist linear unabhängig, d.h. $v_1, \ldots, v_m$ sind linear unabhängig, denn für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ folgt aus $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0_V = 0_K v_1 + \ldots + 0_K v_m$ nach (3), daß $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0_K$.

Sei nun $v \in V$ beliebig. Nach (3) existieren $\mu_1, \ldots, \mu_m \in K$ mit

$$v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_m v_m,$$

also gilt

$$\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_m v_m + \underbrace{(-1_K)}_{\neq 0} \overbrace{v}^{-v} = 0_V,$$

folglich sind $v_1, \ldots, v_m, v$ linear abhängig.

„(4) $\Rightarrow$ (1)": Zu zeigen ist: M ist Erzeugendensystem von V.

Beweis hiervon: Sei $v \in V$. Nach (4) sind $v_1, \ldots, v_m, v$ linear abhängig, also existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1} \in K$, nicht alle $\lambda_i = 0_K$ mit $i \in \{1, \ldots, m+1\}$

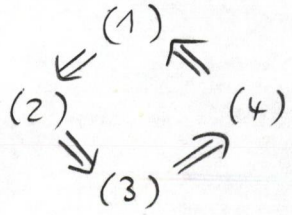
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda_{m+1} v = 0_V.$$

Dann gilt $\lambda_{m+1} \neq 0_K$ (Denn im Falle $\lambda_{m+1} = 0_K$ folgte $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0_V$, nicht alle $\lambda_i = 0_K$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, also $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig im Widerspruch dazu, daß M linear unabhängig.)

Nunmehr folgt

$$v = \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_{m+1}} v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}} v_1 - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} v_m \in \mathrm{Spann}\underbrace{\{v_1, \ldots, v_m\}}_{M},$$

q.e.d.



4.7 Lemma Sei V ein K-Vektorraum und sei $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ($n \in \mathbb{N}_+$). ($v_1, \dots, v_n$ voneinander verschieden)

Dann existiert zu jedem $w \in V \setminus \{0\}$ ein $k \in \{1, \dots, n\}$ derart, daß auch $M' := (M \setminus \{v_k\}) \cup \{w\} = \{v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist.

Zusatz: Ist $w \in W \setminus \{0\}$ und ist

$$w = \overbrace{\lambda_1}^{\in K} v_1 + \dots + \overbrace{\lambda_n}^{\in K} v_n \qquad (*)$$

die (nach 4.6 „(1)⇒(3)") eindeutig bestimmte Darstellung von w als Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$, so existiert wegen $w \neq 0_V$ ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $\lambda_k \neq 0_K$. Für jedes derartige k gilt dann die Beh. des Lemmas.

Beweis (des Lemmas einschl. des Zusatzes):

Seien $w, \lambda_1, \dots, \lambda_n, k$ wie im Zusatz. Wir haben zu zeigen:

M' ist ein Erzeugendensystem von V (1)

und

M' ist linear unabhängig. (2)

Zu (1): Sei $v \in V$ beliebig. Da M Basis von V, existieren $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$. Wegen $\lambda_k \neq 0_K$ gilt nach (*)

$$\frac{1}{\lambda_k} w = \frac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 + \dots + \underbrace{\frac{\lambda_k}{\lambda_k}}_{1} v_k + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_k} v_n,$$

also

$$v_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right) v_i + \frac{1}{\lambda_k} w$$

und daher

$$v = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \mu_i v_i + \underbrace{\mu_k v_k}_{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(-\frac{\lambda_i \mu_k}{\lambda_k}\right) v_i + \frac{\mu_k}{\lambda_k} w}$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(\mu_i - \frac{\lambda_i \mu_k}{\lambda_k}\right) v_i + \frac{\mu_k}{\lambda_k} w \in \operatorname{Spann} M'.$$

Zu (2): Seien $\mu_1, \dots, \hat{\mu}_k, \dots, \mu_n, \mu \in K$ mit

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \mu_i v_i + \mu \underbrace{w}_{\| (*)} = 0_V ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$$

d.h. $$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (\mu_i + \mu \lambda_i) v_i + \mu \lambda_k v_k = 0_V .$$

Dann folgt wegen der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \dots, v_n$, daß

$$\left(\forall_{i \in \{1, \dots, \hat{k}, \dots, n\}} \; \mu_i + \mu \lambda_i = 0_K \right) \text{ und } \mu \underbrace{\lambda_k}_{\neq 0_K} = 0_K ,$$

d.h. $$\left(\forall_{i \in \{1, \dots, \hat{k}, \dots, n\}} \; \mu_i = 0 \right) \text{ und } \mu = 0 , \quad \text{q.e.d.}$$

4.8 Satz (Austauschsatz von Steinitz)

Sei V ein K-Vektorraum und sei $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ($n \in \mathbb{N}_+$). ($v_1, \dots, v_n$ voneinander verschieden)

Sind dann $r \in \mathbb{N}_+$ und $w_1, \dots, w_r$ linear unabhängige Elemente von V, so folgt: $r \leq n$ und es existieren $k_1, \dots, k_r \in \{1, \dots, n\}$ derart, daß auch ($k_1, \dots, k_r$ voneinander verschieden)

$$\tilde{M} := \left(M \setminus \{v_{k_1}, \dots, v_{k_r}\} \right) \cup \{w_1, \dots, w_r\}$$

eine Basis von V ist

(Die Basis $\tilde{M}$ entsteht aus der Basis M, indem man die Elemente $v_{k_1}, \dots, v_{k_r}$ austauscht gegen $w_1, \dots, w_r$)

6.12.02 (15.)

Beweis: Vollständige Induktion über $r \in \mathbb{N}_+$:

Induktionsbeginn $r = 1$: klar nach Lemma 4.7 (Beachte: w_1 ist linear unabhängig genau dann, wenn $w_1 \neq 0_V$, Beweis hiervon als Übung) = Ü 34(i) c)

Schluß von $(r-1) \in \mathbb{N}_+$ auf r: Die Behauptung gelte für $r - 1 \in \mathbb{N}_+$.

Seien also $w_1, \dots, w_\tau \in V$ linear unabhängig (insbes. $w_1, \dots, w_\tau$ voneinander verschieden, Bew. als Übung) $= \ddot{u}\, 3\,4\,(i)\,b)$. Dann sind erst recht auch $w_1, \dots, w_{\tau-1}$ linear unabhängig, also folgt aus der Ind.-Vor., daß $\tau - 1 \leq n$ und daß $k_1, \dots, k_{\tau-1} \in \{1, \dots, n\}$ voneinander verschieden existieren derart, daß auch

$$M' := \left(M \setminus \{v_{k_1}, \dots, v_{k_{\tau-1}}\}\right) \cup \{w_1, \dots, w_{\tau-1}\}$$

eine Basis von V ist. Wir zeigen als nächstes, daß dann

$$\tau \leq n. \qquad (*)$$

[Zu $(*)$: Angen. $(*)$ gilt nicht. Wegen $\tau - 1 \leq n$, d.h. $\tau \leq n+1$ muß dann gelten $\tau = n+1$, d.h. $\tau - 1 = n$. Dann folgt weiter:

$M' = \{w_1, \dots, w_{\tau-1}\}$ ist eine Basis von V und $w_1, \dots, w_{\tau-1}$ sind ($w_1, \dots, w_{\tau-1}$ voneinander verschieden) linear unabhängig im Widerspruch zu 4.6 „(1) $\Rightarrow$ (4)".]

Da M' Basis von V, läßt sich $w_\tau \in V$ als Linearkombination der Elemente von M' schreiben. Setzt man

$$I := \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_{\tau-1}\},$$

so ist I eine $\underbrace{(n - \tau + 1)}_{\geq 1 \ (*)}$-elementige Menge und es gilt

$M' = \{v_i \mid i \in I\} \cup \{w_1, \dots, w_{\tau-1}\}$. Es existiert also eine Darstellung

$$w_\tau = \sum_{i \in I} \underbrace{\lambda_i}_{\in K} v_i + \sum_{j=1}^{\tau-1} \underbrace{\mu_j}_{\in K} w_j.$$

Wir behaupten:

$$\exists_{i \in I} \ \lambda_i \neq 0_K. \qquad (**)$$

[Zu $(**)$: Angen. $(**)$ gilt nicht. Dann folgt $w_\tau = \sum_{j=1}^{\tau-1} \mu_j w_j$, also (nach 4.5): $w_1, \dots, w_\tau$ lin. abhängig im Widerspruch dazu, daß $w_1, \dots, w_\tau$ linear unabhängig.]

Sei im folgenden $i \in I$ bel. wie in (**). Wir setzen $k_r := i$. Dann sind $k_1, \dots, k_{r-1}, k_r \in \{1, \dots, n\}$ voneinander verschieden und nach Lemma 4.7 einschließlich Zusatz ist auch

$$\tilde{M} := (M' \setminus \{v_{k_r}\}) \cup \{w_r\}$$

$$= (M \setminus \{v_{k_1}, \dots, v_{k_r}\}) \cup \{w_1, \dots, w_r\}$$

eine Basis von V, q.e.d.

4.9 Satz Sei $V \neq \{0\}$ ein K-Vektorraum. Dann gilt:

(i) (V besitzt ein endliches Erzeugendensystem) $\Leftrightarrow$ (V besitzt eine endliche Basis).

d.h. per def.: V ist endlich erzeugt

(ii) Ist N ein endliches Erzeugendensystem von V, so existiert eine (endliche) Basis M von V mit $M \subset N$,

Beweis: Zu (ii): Sei $N = \{v_1, \dots, v_n\}$ ein endliches Erzeugendensystem von V ($n \in \mathbb{N}_+$). ($v_1, \dots, v_n$ verschieden) Falls N keine Basis ist (d.h. nicht linear unabhängig ist), ist N nach 4.6 „(2) $\Rightarrow$ (1)" kein minimales Erzeugendensystem, d.h. es existiert $i_1 \in \{1, \dots, n\}$ derart, daß auch $N_1 := N \setminus \{v_{i_1}\} \subset N$ noch ein Erzeugendensystem ist. Falls N_1 keine Basis ist, so folgt ebenso die Existenz eines $i_2 \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1\}$ derart, daß auch $N_2 := N_1 \setminus \{v_{i_2}\} = N \setminus \{v_{i_1}, v_{i_2}\}$ noch ein Erzeugendensystem ist usw. Nach endlich vielen (höchstens $n-1$) Schritten erhält man auf diese Weise offenbar ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, also eine Basis M von N, die Teilmenge von N ist.

Zu (i): „$\Rightarrow$" klar nach (ii)

„$\Leftarrow$" ist trivial, da jede Basis insbesondere auch ein Erzeugendensystem ist, q.e.d.

4.10 Satz Sei $V \neq \{0\}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann ist jede Basis von V endlich und je zwei Basen haben gleich viele Elemente.

Beweis: 1.) Nach 4.9 existiert eine endliche Basis M von V, also existiert $n \in \mathbb{N}_+$ mit $\#M = n$. Sei $\tilde{M}$ eine beliebige Basis von V. Wäre $\tilde{M}$ nicht endlich, so existierten $n+1$ voneinander verschiedenen Elemente $w_1, \dots, w_{n+1}$ von $\tilde{M}$, also (da $\tilde{M}$ linear unabhängig) $w_1, \dots, w_{n+1}$ linear unabhängige Elemente von V im Widerspruch zu 4.8 (Steinitz).

2.) Seien $M, \tilde{M}$ zwei Basen von V, also $M, \tilde{M}$ nach 1.) endliche Mengen, etwa $M = \{v_1, \dots, v_n\}$, $v_1, \dots, v_n$ verschieden, $\tilde{M} = \{w_1, \dots, w_r\}$, $w_1, \dots, w_r$ verschieden, insbes. $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig, $w_1, \dots, w_r$ linear unabhängig. Dann folgt aus 4.8 (Steinitz): $r \leq n$ und $n \leq r$, also $n = r$, q.e.d.

4.11 Def. Sei V ein K-Vektorraum. Wir definieren $\dim V$ (= $\dim_K V$) $\in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, die sog. Dimension von V (über K), wie folgt:

$$\dim V := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } V = \{0\}, \\ n \in \mathbb{N}_+ & , \text{ falls } (V \text{ endlich erzeugt und jede Basis von } V \text{ } n\text{-elementig ist}), \\ \infty & , \text{ falls } V \text{ nicht endlich erzeugt.} \end{cases}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt V n-dimensional (über K), falls $\dim V = n$.

V heißt endlich-dimensional (bzw. unendlich-dimensional), falls $\dim V \in \mathbb{N}$ (bzw. $\dim V = \infty$).

4.12 Beispiel Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}_+$.

Dann ist $K^n = \{v = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_i \in K \text{ für } i = 1, \dots, n\}$ ein n-dim. K-Vektorraum.

Setzt man $\left.\begin{aligned} e_1 &:= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 &:= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &:= (0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}\right\} \in K^n$ (genauer: $e_i^{(n)}$ statt e_i),

so ist $M := \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von K^n, die sog. kanonische Basis von K^n

[M ist Erzeugendensystem wegen

$$\forall_{v=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in K^n} \quad v = \underbrace{\lambda_1 e_1}_{=(\lambda_1,0,\dots,0)} + \dots + \underbrace{\lambda_n e_n}_{=(0,\dots,0,\lambda_n)} \in \operatorname{Span} M.$$

M ist linear unabhängig wegen

$$\forall_{\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K} \left(\underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)} = (0,\dots,0) = 0_{K^n} \Rightarrow \lambda_i = 0 \text{ für } i=1,\dots,n \right)]$$

4.13 Def.: Seien V, W K-Vektorräume

(i) Sei $F: V \to W$ eine Abbildung

F heißt (K-)linear, (auch (K-Vektorraum)-Homomorphismus)

$$:\Longleftrightarrow \forall_{v_1, v_2 \in V} \quad F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2) \quad (1)$$

und

$$\forall_{v \in V} \forall_{\lambda \in K} \quad F(\lambda v) = \lambda F(v) \quad (2)$$

$$\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \text{s.u.} \quad \forall_{\substack{v_1, v_2 \in V \\ \lambda_1, \lambda_2 \in K}} \quad F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) \quad (3)$$

[Zu (*): „$\Rightarrow$" $F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \underset{(1)}{=} F(\lambda_1 v_1) + F(\lambda_2 v_2) \underset{(2)}{=} \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2)$,

„$\Leftarrow$" $F(v_1 + v_2) = F(1_K v_1 + 1_K v_2) \underset{(3)}{=} 1_K F(v_1) + 1_K F(v_2) = F(v_1) + F(v_2)$,

$F(\lambda v) = F(\lambda v + \underbrace{0_K v}_{=0_V}) \underset{(3)}{=} \lambda F(v) + \underbrace{0_K F(v)}_{=0_W} = \lambda F(v)$.]

Wir bezeichnen die Menge aller linearen Abbildungen (= Homomorphismen) mit $\boxed{\mathrm{Hom}(V,W)}$.

"

$\mathrm{Hom}_K(V,W)$

(ii) Eine lineare Abbildung $F: V \to W$ heißt ein

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphismus} \\ \text{Monomorphismus} \\ \text{Epimorphismus} \end{array} \right\}$, falls F $\left\{ \begin{array}{l} \text{bijektiv} \\ \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \end{array} \right\}$

(genauer: K-Vektorraum-Isomorphismus usw.)

Ferner heißt im Fall $V = W$ ein $\left\{ \begin{array}{l} \text{Homomorphismus} \\ \text{Isomorphismus} \end{array} \right\}$ $F: V \to V$

auch ein $\left\{ \begin{array}{l} \text{Endomorphismus} \\ \text{Automorphismus} \end{array} \right\}$ von V. Mit

$\boxed{\mathrm{End}(V)}$ bzw. $\boxed{\mathrm{Aut}(V)}$ bezeichnen wir die Menge aller Endomorphismen bzw. Automorphismen von V.

10.12.02
(16.)

4.14 Satz Sei V ein n-dim. K-Vektorraum und seien $v_1, \dots, v_r \in V$ K-linear unabhängig ($n, r \in \mathbb{N}_+$). Dann gilt:

(i) $r \leq n$,

(ii) $r = n \iff \{v_1, \dots, v_r\}$ ist Basis von V,

(iii) $r < n \Rightarrow \{v_1, \dots, v_r\}$ läßt sich zu einer Basis $\{v_1, \dots, v_r, \dots, v_n\}$ von V ergänzen.

Beweis: (i) und (ii) sind klar nach 4.8 (Steinitz)

Zu (iii): Sei $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis von V. Nach 4.8 (Steinitz) existieren voneinander verschiedene $k_1, \dots, k_r \in \{1, \dots, n\}$ derart, daß

$$\left(\{w_1, \dots, w_n\} \setminus \{w_{k_1}, \dots, w_{k_r}\}\right) \cup \{v_1, \dots, v_r\}$$

eine Basis von V ist, die $\{v_1, \dots, v_r\}$ als Teilmenge enthält,
q.e.d.

4.15 Satz Sei V ein n-dim. K-Vektorraum ($n \in \mathbb{N}_+$).
Dann gilt:

$$n = \max\{r \in \mathbb{N}_+ \mid \text{Es existieren } K\text{-linear unabhängige } v_1, \dots, v_r \in V\}$$

(= Maximalzahl K-linear unabhängiger Vektoren in V)

Beweis: „$\geq$" gilt nach 4.14 (i)

„$\leq$" Es existiert eine Basis $\{w_1, \dots, w_n\}$ von V, bestehend aus $n = \dim V$ Elementen, also $w_1, \dots, w_n \in V$ K-linear unabhängig. Damit $\leq$ klar, q.e.d.

4.16 Satz Sei $V \neq \{0\}$ ein K-Vektorraum und seien $v_1, \dots, v_k \in V$ ($k \in \mathbb{N}_+$). Dann gilt:

$$\left(v_1, \dots, v_k \text{ } K\text{-linear unabhängig} \iff \dim \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = k\right)$$

Beweis: Sei $\tilde{V} := \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$, also $\tilde{V} \subset V$ Untervektorraum.

"$\Rightarrow$" Seien $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig. Dann ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\tilde{V}$, also eine Basis von $\tilde{V}$, also $\dim \tilde{V} = k$

"$\Leftarrow$" $\{v_1, \dots, v_k\}$ ist ein endliches Erzeugendensystem von $\tilde{V}$. Nach 4.9 (ii) existiert eine Basis M von $\tilde{V}$ mit $M \subset \{v_1, \dots, v_k\}$. M hat wegen $\dim \tilde{V} = k$ genau k Elemente. Hieraus folgt: $M = \{v_1, \dots, v_k\}$ und $v_1, \dots, v_k$ sind voneinander verschiedene Elemente der Basis M, also ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ linear unabhängig, d.h. $v_1, \dots, v_k$ sind linear unabhängig, q.e.d.

4.17 Satz Seien V, W K-Vektorräume und $F: V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Dann gilt stets:

(i) $F(0_V) = 0_W$, $F(v_1 - v_2) = F(v_1) - F(v_2)$,

$F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_n F(v_n)$.

(ii) $v_1, \dots, v_n \in V$ K-linear abhängig $\Rightarrow F(v_1), \dots, F(v_n) \in W$ K-linear abhängig.

(iii) $\tilde{V} \subset V$ Untervektorraum (kurz: Unterraum) $\Rightarrow F(\tilde{V}) \subset W$ Untervektorraum und $\dim F(\tilde{V}) \leq \dim \tilde{V}$.

(iv) $\tilde{W} \subset W$ Untervektorraum $\Rightarrow \bar{F}^{-1}(\tilde{W}) \subset V$ Untervektorraum

(v) $F: V \to W$ Isomorphismus ((von K-Vektorräumen)) $\Rightarrow \bar{F}: W \to V$ Isomorphismus

Beweis: Zu (i): $F(0_V) = F(0_K 0_V) = 0_K F(0_V) = 0_W$,

$F(v_1 - v_2) = F(v_1 + (-v_2)) = F(v_1) + F(\underbrace{-v_2}_{(-1_K)v_2}) = F(v_1) + \underbrace{(-1_K) F(v_2)}_{-F(v_2)}$

$= F(v_1) - F(v_2)$

Rest folgt durch einfache Induktion über n, (für $n = 1, 2$ klar).

Zu (ii): Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear abhängig. Dann existiert $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n - \{0\}$ mit $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$, also auch mit $\underbrace{F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)}_{\text{II (i)}} = F(0_V) \underset{(i)}{=} 0_W$, also

$$\lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_n F(v_n)$$

$F(v_1), \dots, F(v_n)$ linear abhängig.

Zu (iii): Seien $w_1, w_2 \in F(\tilde{V})$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Dann existieren $v_1, v_2 \in \tilde{V}$ mit $F(v_1) = w_1$, $F(v_2) = w_2$ und es folgt

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) = F(\underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}_{\in \tilde{V}, \text{ da } \tilde{V} \subset V \text{ Unterraum}}) \in F(\tilde{V}).$$

Beim Nachweis von $\dim F(\tilde{V}) \leq \dim \tilde{V}$ dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß $k := \dim \tilde{V} \in \mathbb{N}$. Sind dann $F(v_1), \dots, F(v_n) \in F(\tilde{V})$ linear unabhängig, wobei $n \in \mathbb{N}_+$ und $v_1, \dots, v_n \in \tilde{V}$, so sind nach (ii) auch $v_1, \dots, v_n \in \tilde{V}$ linear unabhängig, also nach 4.15: $n \leq k$. Daher ist die Maximalzahl linear unabhängiger Elemente von $F(\tilde{V}) \leq k$, also gilt nach 4.15: $\dim F(\tilde{V}) \leq k = \dim \tilde{V}$.

Zu (iv): Seien $v_1, v_2 \in \bar{F}(\tilde{W})$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Dann folgt

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \underbrace{F(v_1)}_{\in \tilde{W}} + \lambda_2 \underbrace{F(v_2)}_{\in \tilde{W}} \in \tilde{W}, \text{ da } \tilde{W} \subset W \text{ Unterraum},$$

also $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \bar{F}(\tilde{W})$.

Zu (v): Zu zeigen ist lediglich die Linearität von $\bar{F}: W \to V$. Seien $w_1, w_2 \in W$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Dann folgt

$$\bar{F}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \bar{F}(\underbrace{\lambda_1 F(\bar{F}(w_1)) + \lambda_2 F(\bar{F}(w_2))}_{\text{II}})$$

$$F(\lambda_1 \bar{F}(w_1) + \lambda_2 \bar{F}(w_2))$$

$$= \lambda_1 \bar{F}(w_1) + \lambda_2 \bar{F}(w_2), \quad \text{q.e.d.}$$

4.18 Satz: Sind U, V, W K-Vektorräume und $F: U \to V$, $G: V \to W$ K-lineare Abbildungen, so ist auch $G \circ F: U \to W$ eine K-lineare Abbildung

Beweis: Für alle $u_1, u_2 \in U$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ gilt

$$(G \circ F)(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = G\Big(\underbrace{F(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)}_{\substack{\| \text{ F linear} \\ \lambda_1 F(u_1) + \lambda_2 F(u_2)}}\Big)$$

$$\underset{G \text{ linear}}{=} \lambda_1 G(F(u_1)) + \lambda_2 G(F(u_2)) = \lambda_1 (G \circ F)(u_1) + \lambda_2 (G \circ F)(u_2),$$

q.e.d.

4.19 Def. (Matrizen)

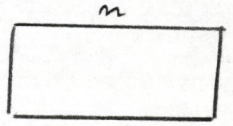
Sei K ein Körper

(i) Seien $m, n \in \mathbb{N}_+$.

Eine $(m \times n)$-Matrix mit Koeffizienten in K ist per def. eine Abbildung

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow K$$
$$(i, j) \longmapsto A_{ij} = A((i,j))$$

Man schreibt $A = (A_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ und notiert die $m \cdot n$ Werte A_{ij} von A in einem rechteckigen Schema aus m Zeilen und n Spalten wie folgt



	1. Spalte	2. Spalte		(n-1). Spalte	n. Spalte
1. Zeile	A_{11}	A_{12}	.....	$A_{1,n-1}$	A_{1n}
2. Zeile	A_{21}	A_{22}	.....	$A_{2,n-1}$	A_{2n}
	⋮	⋮			
(m-1). Zeile	$A_{m-1,1}$	$A_{m-1,2}$	.....	$A_{m-1,n-1}$	$A_{m-1,n}$
m. Zeile	A_{m1}	A_{m2}		$A_{m,n-1}$	A_{mn}

Wir bezeichnen die Menge $K^{\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}}$ aller $(m\times n)$-Matrizen mit Koeffizienten in K mit $\boxed{M(m\times n, K)}$.

Nach 4.2, 2.) ist $M(m\times n, K)$ ein K-Vektorraum mit der folgenden Addition und skalaren Multiplikation:

$$(A+B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij},$$

$$(\lambda A)_{ij} := \lambda A_{ij}$$

für alle $i,j \in \{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}$.

Beispiel: $K = \mathbb{Q}$ (oder $\mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -6 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

Analog zu 4.12 folgt leicht:

$M(m\times n, K)$ ist ein mn-dim. K-Vektorraum mit der kanonischen Basis $\{E_{ij} \mid (i,j) \in \{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}\}$, wobei $E_{ij} \in M(m\times n, K)$ charakterisiert ist durch

$$(E_{ij})_{kl} = \underbrace{\delta_{ik}}\,\delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{für } (k,l) = (i,j) \\ 0 & \text{für } (k,l) \neq (i,j) \end{cases}$$

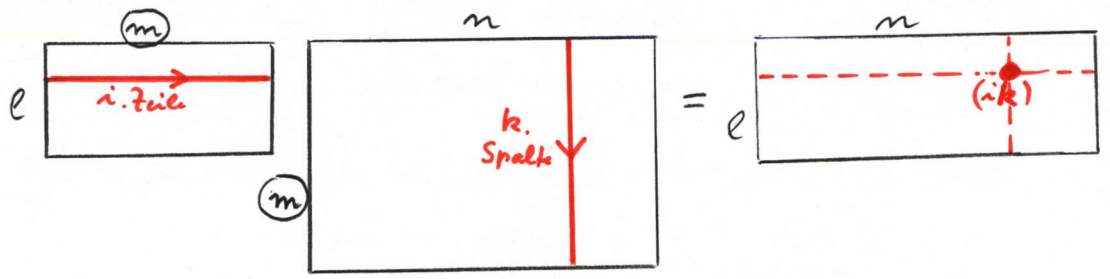
$$:= \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

„Kronecker-Symbol"

13.12.02 (17.)

(ii) Seien $\ell, m, n \in \mathbb{N}_+$. Dann wird eine „Matrizen-Multiplikation" wie folgt definiert:

$$M(\ell \times m, K) \times M(m \times n, K) \longrightarrow M(\ell \times n, K)$$



$$(A, B) \longmapsto AB$$

heißt „das Produkt von A und B"

$$\forall_{i,k \in \{1,\dots,\ell\} \times \{1,\dots,n\}} \quad (AB)_{ik} := \sum_{j=1}^{m} \underbrace{A_{ij}}_{\substack{j\text{-Element der} \\ i\text{-Zeile von } A}} \underbrace{B_{jk}}_{\substack{j\text{-Element der} \\ k\text{-Spalte von } B}} \qquad (*)$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 15 \\ -1 & 1 & -5 \\ -1 & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation $(*)$ erfüllt die folgenden Assoziativ- und Distributivgesetze:

$\forall$ $A, \tilde{A} \in \underbrace{M(n_1 \times n_2)}_{\text{Kurzform von } M(n_1 \times n_2, K)}$, $B, \tilde{B} \in M(n_2 \times n_3)$, $C \in M(n_3 \times n_4)$

$$\underbrace{(AB)}_{\in M(n_1 \times n_3)} C = A \underbrace{(BC)}_{\in M(n_2 \times n_4)} \in M(n_1 \times n_4) \qquad (1)$$

$$(A + \tilde{A})B = AB + \tilde{A}B \qquad (2)$$

$$A(B + \tilde{B}) = AB + A\tilde{B} \qquad (3)$$

[Zu (1): Für alle $(i_1, i_4) \in \{1,\dots,n_1\} \times \{1,\dots,n_4\}$ gilt

$$\underbrace{\big((AB)C\big)}_{\in M(n_1 \times n_3)}{}_{i_1 i_4} = \sum_{j_3=1}^{n_3} \underbrace{(AB)_{i_1 j_3}}_{= \sum_{j_2=1}^{n_2} A_{i_1 j_2} B_{j_2 j_3}} C_{j_3 i_4} = \sum_{j_2=1}^{n_2} \sum_{j_3=1}^{n_3} A_{i_1 j_2} B_{j_2 j_3} C_{j_3 i_4}$$

$$\underbrace{\big(A(BC)\big)}_{\in M(n_2 \times n_4)}{}_{i_1 i_4} = \sum_{j_2=1}^{n_2} A_{i_1 j_2} \underbrace{(BC)_{j_2 i_4}}_{= \sum_{j_3=1}^{n_3} B_{j_2 j_3} C_{j_3 i_4}} = \sum_{j_3=1}^{n_3} \sum_{j_2=1}^{n_2} A_{i_1 j_2} B_{j_2 j_3} C_{j_3 i_4}$$

Zu (2), (3): klar nach (*) und (i).]

(iii) Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Wir setzen

$$\boxed{M_n(K)} := M(\underline{n} \times \underline{n}, K)$$

kurz: M_n

$M_n(K)$ ist mit der Addition $M_n(K) \times M_n(K) \longrightarrow M_n(K)$ aus (i) und $(A, B) \mapsto A+B$ der Multiplikation $M_n(K) \times M_n(K) \longrightarrow M_n(K)$ aus (ii) nach $(A, B) \mapsto AB$ (1), (2), (3) ein Ring (vgl. 3.6), der sog. Ring der $(n \times n)$-Matrizen mit Koeffizienten in K (oder kurz: der Matrizenring $M_n(K)$)

Der Ring $M_n(K)$ besitzt die sog. $(n \times n)$-Einheitsmatrix

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(\text{also } \forall_{i,j \in \{1,\dots,n\}} (E_n)_{ij} = \delta_{ij}\right),$$

als Einselement, d.h. $\forall_{A \in M_n(K)} \; AE_n = E_n A = A$.

[Denn $(AE_n)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \delta_{jk} = A_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} A_{jk} = (E_n A)_{ik}$.]

$M_n(K)$ ist im Falle $n \geq 2$ nicht kommutativ (für einen bel. Körper K)

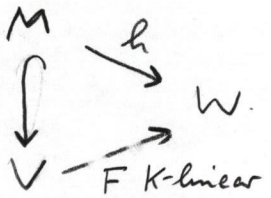
Beispiel hierzu für $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$1_K \neq 0_K$

4.20 Satz Seien V, W K-Vektorräume. Dann gilt:

(i) Ist M eine Basis von V und $h: M \to W$ eine bel. Abbildung, so existiert genau eine K-lineare Abbildung $F: V \to W$ mit $F|M = h$, (d.h. das Diagramm



ist kommutativ).

(ii) Ist N ein Erzeugendensystem von V (z.B. eine Basis von V) und sind $F, G: V \to W$ zwei K-lineare Abbildungen mit $F|N = G|N$, so folgt $F = G$.

Beweis: als Übung.

4.21 Satz Sei V ein K-Vektorraum und seien $U, \tilde{U}$ zwei endlich-dimensionale Untervektorräume von V. Dann gilt:

$$\dim U + \dim \tilde{U} = \dim \underbrace{(U \cap \tilde{U})}_{\text{Untervektorräume von } V} + \dim \underbrace{(U + \tilde{U})}_{\text{Untervektorräume von } V}$$

Beweis: Sei $r := \dim(U \cap \tilde{U})$, $s := \dim U$, $\tilde{s} := \dim \tilde{U} \in \mathbb{N}$.
O.B.d.A. $s, \tilde{s} \in \mathbb{N}_+$ (sonst $U = \{0\}$ oder $\tilde{U} = \{0\}$ und die Beh. ist trivial). Im Falle $r \in \mathbb{N}_+$ sei $\{v_1, \dots, v_r\}$ eine Basis von $U \cap \tilde{U}$
Nach dem Austauschsatz von Steinitz (oder nach 4.14(iii)) (= 4.8) läßt sich $\{v_1, \dots, v_r\}$ sowohl zu einer Basis $\{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_s\} =: N$ von U als auch zu einer Basis $\{v_1, \dots, v_r, \tilde{u}_{r+1}, \dots, \tilde{u}_{\tilde{s}}\} =: \tilde{N}$ von $\tilde{U}$ fortsetzen (Im Falle $r = 0$ sei $\{u_1, \dots, u_s\} = N$ eine beliebige Basis von U und $\{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{\tilde{s}}\} = \tilde{N}$ eine beliebige Basis von $\tilde{U}$.)
Zum Nachweis der Beh. genügt es zu zeigen, daß gilt:

$$M := \{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_s, \tilde{u}_{r+1}, \dots, \tilde{u}_{\tilde{s}}\} = N \cup \tilde{N} \subset U + \tilde{U}$$

ist eine Basis von $U + \tilde{U}$, bestehend aus $s + \tilde{s} - r$ verschiedenen Elementen
Zunächst ist M ein Erzeugendensystem von $U + \tilde{U}$, da offenbar

$$\operatorname{Span} M = \operatorname{Span} N + \operatorname{Span} \tilde{N} = U + \tilde{U}.$$

Zu zeigen bleibt: M ist auch linear unabhängig, d.h. und hat $s + \tilde{s} - r$ Elemente

$v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_s, \tilde{u}_{r+1}, \dots, \tilde{u}_{\tilde{s}}$ sind linear unabh.

Beweis hiervon: Gelte

$$\sum_{i=1}^{r} \underbrace{\lambda_i}_{\in K} v_i + \sum_{j=r+1}^{s} \underbrace{\mu_j}_{\in K} u_j + \sum_{k=r+1}^{\tilde{s}} \underbrace{\tilde{\mu}_k}_{\in K} \tilde{u}_k = 0_V.$$

Dann folgt zunächst aus

$$\underbrace{\sum_{i} \lambda_i v_i + \sum_{j} \mu_j u_j}_{\in U} = \underbrace{- \sum_{k} \tilde{\mu}_k \tilde{u}_k}_{\in \tilde{U}} \in U \cap \tilde{U} = \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_r\},$$

daß alle $\mu_j = 0$, und ebenso folgt aus (vgl. 4.6)

$$\underbrace{\sum_i \lambda_i v_i + \sum_k \tilde{\mu}_k \tilde{u}_k}_{\in \tilde{U}} = \underbrace{-\sum_j \mu_j u_j}_{\in U} \in U \cap \tilde{U} = \mathrm{Spann}\{v_1, \dots, v_r\},$$

daß auch alle $\tilde{\mu}_k = 0$. Daher gilt

$$\sum_i \lambda_i v_i = 0_V,$$

also folgt aus der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \dots, v_r$, daß auch alle $\lambda_i = 0$, q.e.d.

4.22 Satz Seien V, W K-Vektorräume, V endlich-dimensional und sei $f: V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Dann gilt:

$\mathrm{Kern}\, f := f^{-1}(\{0_W\})$ ist ein Untervektorraum von V (nach 4.17(i'V)),

$\mathrm{Bild}\, f := f(V)$ ist ein Untervektorraum von W (nach 4.17 (iii'))

und

$$\dim V = \underbrace{\dim(\mathrm{Kern}\, f)}_{\text{„Nullität von } f\text{"}} + \underbrace{\dim(\mathrm{Bild}\, f)}_{\text{„Rang von } f\text{"}}.$$

17.12.02 (18.)

Beweis: Sei $n := \dim V$, $r := \dim(\mathrm{Kern}\, f) \le n$, $s := \dim(\mathrm{Bild}\, f) \le n$.

Sei $\{v_1, \dots, v_r\}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}\, f$. Nach 4.8 (Steinitz) existiert eine Fortsetzung von $\{v_1, \dots, v_r\}$ zu einer Basis $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ von V ($r = 0$ möglich). Zu zeigen ist: $\dim(\mathrm{Bild}\, f) = n - r$. Hierfür genügt es zu zeigen, daß gilt:

$M := \{f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)\}$ ist eine Basis von $f(V)$, bestehend aus $n-r$ Elementen

Beweis hiervon: M ist Erzeugendensystem von $f(V)$, denn zu jedem $v \in V$ existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, also $f(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{f(v_i)}_{=0_W \text{ für } i=1,\dots,r} = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i f(v_i)$. Ferner ist M linear unabh. und $\#M = n - r$, d.h. $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n) \in W$ sind linear unabhängig, denn aus $0_W = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i f(v_i) = f\left(\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i v_i\right)$ folgt $\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i v_i \in \mathrm{Kern}\, f = \mathrm{Spann}\{v_1, \dots, v_r\}$, also sind alle $\lambda_i = 0$, da $v_1, \dots, v_n$ lin. unabh., q.e.d.

4.23 („Matrizen und lineare Abbildungen")

(i) **Def.**: Seien $\ell, m \in \mathbb{N}_+$. Wir definieren (Reihenfolge beachten!!)

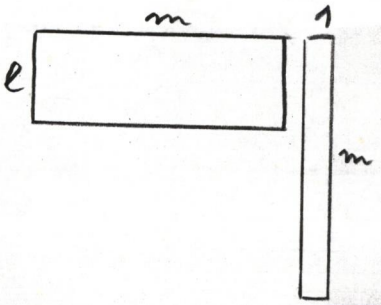
$$\Phi : M(\ell \times m, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{((K))}(K^m, K^\ell) \quad \text{durch}$$

(anschreiben: $\Phi_{(\ell \times m, K)}$)

$$A \longmapsto \left(\Phi_A : K^m \to K^\ell\right) \qquad \text{(Produkt von Matrizen, vgl. 4.19 (ii))}$$

$$A = (A_{ij})_{\substack{i=1,\dots,\ell \\ j=1,\dots,m}}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & & \\ A_{\ell 1} & \cdots & A_{\ell m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m A_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m A_{\ell j} x_j \end{pmatrix} \qquad (*)$$



(In der Literatur oft einfach A statt Φ_A, d.h. A wird als Element von $\mathrm{Hom}(K^m, K^\ell)$ betrachtet)

Φ_A bildet den k-ten kanon. Einheitsvektor $e_k^{(m)}$ von K^m auf den k-ten Spaltenvektor $\begin{pmatrix} A_{1k} \\ \vdots \\ A_{\ell k} \end{pmatrix} \in K^\ell$ von A ab (für $k = 1, \dots, m$) (1)

[Denn $\Phi_A(e_k^{(m)}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m A_{1j}\delta_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m A_{\ell j}\delta_{kj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1k} \\ \vdots \\ A_{\ell k} \end{pmatrix}$.]

Aus (*) folgt sofort:

Φ ist K-linear, d.h. $\forall_{\substack{A, \tilde{A} \in M(\ell \times m) \\ \lambda \in K}}$ $\Phi_{A+\tilde{A}} = \Phi_A + \Phi_{\tilde{A}}$, $\Phi_{\lambda A} = \lambda \Phi_A$ (2)

Wir zeigen darüber hinaus:

Φ ist ein (K-Vektorraum-) Isomorphismus (3)

[Zur Injektivität von Φ: Aus $\Phi_A = \Phi_{\tilde{A}}$ folgt nach (1), daß A und $\tilde{A}$ dieselben Spaltenvektoren haben, d.h. daß $A = \tilde{A}$.

Zur Surjektivität von Φ: Sei $f \in \mathrm{Hom}(K^m, K^\ell)$ und sei $A \in M(\ell \times m, K)$ die Matrix mit dem k-ten Spaltenvektor $\begin{pmatrix} A_{1k} \\ \vdots \\ A_{\ell k} \end{pmatrix} := f(e_k^{(m)}) \in K^\ell$ für $k = 1, \dots, m$. Dann gilt nach (1)

$\Phi_A(e_k^{(m)}) = f(e_k^{(m)})$ für $k = 1, \dots, m$, also folgt aus 4.20(ii), daß $\Phi_A = f$.]

(ii) $\forall_{\substack{A \in M(n_1 \times n_2) \\ B \in M(n_2 \times n_3) \\ (\Rightarrow AB \in M(n_1 \times n_3))}}$ $\underbrace{\Phi_{AB}}_{\in \mathrm{Hom}(K^{n_3}, K^{n_1})} = \underbrace{\Phi_A}_{\in \mathrm{Hom}(K^{n_2}, K^{n_1})} \circ \underbrace{\Phi_B}_{\in \mathrm{Hom}(K^{n_3}, K^{n_2})}$ (4)

[Zu (4): $\Phi_{AB}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_3} \end{pmatrix}}_{=:x} = (A\,B)\,x \overset{\text{Matrizen}}{=} A(\underbrace{B\,x}_{\Phi_B(x)}) = \Phi_A(\Phi_B(x)) = (\Phi_A \circ \Phi_B)(x)$]

(4) besagt: Die lineare Abbildung Φ_{AB}, die der Produktmatrix AB korrespondiert, ist die Komposition der linearen Abbildungen Φ_A und Φ_B, die den Matrizen A und B korrespondieren.

(iii) Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Aus (i), (ii) folgt insbesondere:

$$\Phi : \underbrace{M_n(K)}_{\text{ii } M(n \times n, K)} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{End}(K^n)}_{\text{ii } \mathrm{Hom}(K^n, K^n)}, \quad A \longmapsto \Phi_A,$$

ist ein Isomorphismus des Matrizenrings $M_n(K)$ (vgl. 4.19(iii)) auf den „Endomorphismenring" $\underbrace{\mathrm{End}(K^n)}_{\text{ii } (\mathrm{End}(K^n), +, \circ)}$ von K^n (vgl. 4.13(ii) (und ii 32(iii))).

4.24 Def Sei $A = (A_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in M(m \times n, K)$,

wobei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}_+$.

Für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ heißt

$$A_{i\cdot} := (A_{i1}, \dots, A_{in}) \in K^n \text{ die } \underline{\text{i-te Zeile von A}}$$

und für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ heißt

$$A_{\cdot j} := \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} \in K^m \text{ die } \underline{\text{j-te Spalte von A}}.$$

Ferner definieren wir

$ZR(A) := \text{Spann}\{A_{1\cdot}, \dots, A_{m\cdot}\} \subset K^n$, den sog. Zeilenraum von A,

$SR(A) := \text{Spann}\{A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot n}\} \subset K^m$, den sog. Spaltenraum von A,

Zeilenrang von A $:= \dim ZR(A)$

$\overset{4.15}{=}$ Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A

Spaltenrang von A $:= \dim SR(A)$

$\overset{4.15}{=}$ Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A

Satz Sei $A \in M(m \times n, K)$, wobei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}_+$.
Dann gilt:

Der Zeilenrang von A ist gleich dem Spaltenrang von A.

Zusatz Der Zeilenrang von A (= Spaltenrang von A) ist im Falle $A \neq 0$ (Nullmatrix) gleich der größten Zahl $r \in \mathbb{N}_+$ mit der Eigenschaft:
Es existiert eine Untermatrix $\tilde{A} \in M(r \times r, K)$ von A, d.h.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{i_1 j_1} & \cdots & A_{i_1 j_r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i_r j_1} & \cdots & A_{i_r j_r} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m \\ &1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n, \end{aligned}$$

mit linear unabhängigen Zeilen und linear unabhängigen Spalten.

Beweis: Sei $r \in \mathbb{N}_+$:= Zeilenrang von A, $s \in \mathbb{N}_+$:= Spaltenrang von A ($A \neq 0$ o.B.d.A.)

Seien $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m$ mit $ZR(A) = \text{Spann}\{A_{i_1 \cdot}, \dots, A_{i_r \cdot}\}$

und seien $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n$ mit $SR(A) = \text{Spann}\{A_{\cdot j_1}, \dots, A_{\cdot j_s}\}$,

(solche Indizes existieren nach 4.9 (ii)) und sei

$$B := \begin{pmatrix} A_{i_1 j_1} & \dots & A_{i_1 j_s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i_r j_1} & \dots & A_{i_r j_s} \end{pmatrix} \in M(r \times s, K).$$

Wir werden zeigen:

Die s Spalten von B sind linear unabh. Elemente von K^r (1)

und

die r Zeilen von B sind linear unabh. Elemente von K^s. (2)

Aus (1) und $\dim K^r \overset{4.12}{=} r$ folgt $s \leq r$, und aus (2) folgt ebenso $r \leq s$, also folgt $r = s$.

Zu (1), (2): Wir führen den Beweis von (1) aus; der Beweis von (2) gelingt völlig analog (aus Symmetriegründen).

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ und gelte

$$\sum_{\ell=1}^{s} \lambda_\ell B_{\cdot \ell} = 0_{K^r}, \quad \text{d.h.} \quad \forall_{k \in \{1,\dots,r\}} \sum_{\ell=1}^{s} \lambda_\ell B_{k\ell} = \underbrace{0}_{=0_K},$$

d.h.

$$\forall_{k \in \{1,\dots,r\}} \sum_{\ell=1}^{s} \lambda_\ell A_{i_k j_\ell} = 0, \qquad (3)$$

d.h.

$$\forall_{i \in \{i_1,\dots,i_r\}} \sum_{\ell=1}^{s} \lambda_\ell A_{i j_\ell} = 0. \qquad (\tilde{3})$$

Wir zeigen, daß dann auch

$$\forall_{i \in \{1,\dots,m\} - \{i_1,\dots,i_r\}} \sum_{\ell=1}^{s} \lambda_\ell A_{i j_\ell} = 0 \qquad (4)$$

[Beweis von (4): Sei $i \in \{1,\dots,m\} - \{i_1,\dots,i_r\}$. Dann ist die i-te Zeile $A_{i\cdot}$ von A Linearkombination von $A_{i_1 \cdot}, \dots, A_{i_r \cdot}$, also existieren $\mu_1, \dots, \mu_r \in K$ mit

$$A_{i\cdot} = \sum_{k=1}^{r} \mu_k A_{i_k \cdot} ,$$

also

$$\sum_{\ell=1}^{\hat{s}} \lambda_\ell \underbrace{A_{i j_\ell}}_{\sum_{k=1}^{r} \mu_k A_{i_k j_\ell}} = \sum_{k=1}^{r} \mu_k \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\hat{s}} \lambda_\ell A_{i_k j_\ell}}_{\overset{(3)}{=} 0} = 0 \quad]$$

Aus $(\tilde{3})$, (4) folgt

$$\forall_{i \in \{1,\dots,m\}} \sum_{\ell=1}^{\hat{s}} \lambda_\ell A_{i j_\ell} = 0 , \text{ d.h. } \sum_{\ell=1}^{\hat{s}} \lambda_\ell A_{\cdot j_\ell} = 0_{K^m},$$

also wegen der linearen Unabh. von $A_{\cdot j_1}, \dots, A_{\cdot j_s}$:

$\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$, womit (1) gezeigt ist.

Damit ist (s.o.) die Behauptung $r = s$ des Satzes bewiesen. Ferner ist die Existenz einer Untermatrix $\tilde{A} \in M(r \times r, K)$ wie im Zusatz gezeigt. Daß r die größte Zahl mit der im Zusatz genannten Eigenschaft ist, ist trivial: Denn je $(r+1)$ Zeilen von A, also erst recht je $(r+1)$ Zeilen einer bel. Untermatrix von A, sind linear abhängig, q.e.d.

20.12.02
(19.)

Def.: Für eine Matrix $A \in M(m \times n, K)$ definieren wir

$$\underbrace{\text{Rang } A}_{\text{Rang von } A} := \text{Zeilenrang von } A \underset{\text{Satz}}{=} \text{Spaltenrang von } A$$

Es gilt stets

$$\text{Rang } A = \underbrace{\text{Rang } \Phi_A}_{:= \dim \text{Bild } \Phi_A} \qquad (*)$$

[Denn $\text{Rang } A \underset{\text{Def}}{=} \text{Spaltenrang von } A$

$\underset{\text{Def.}}{=} \dim \text{Spann} \{\underbrace{A_{\cdot 1}}_{= \Phi_A(e_1^{(n)})}, \dots, \underbrace{A_{\cdot n}}_{= \Phi_A(e_n^{(n)})}\}$

$\underset{\text{(da } \Phi_A \text{ linear)}}{\overset{4.23(1)}{=}} \Phi_A(\text{Spann}\{e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}\}) = \Phi_A(K^n) = \text{Bild } \Phi_A$]

4.25 (i) Def.: Sei K ein Körper.

Wir definieren für alle $m, n \in \mathbb{N}_+$ eine Abbildung

$$\left.\begin{aligned} \ldots^t : M(m\times n, K) &\longrightarrow M(n\times m, K) \\ A &\longmapsto A^t \end{aligned}\right\} (*)$$

durch

$$\forall_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\ j\in\{1,\ldots,m\}}} \quad A^t{}_{ij} := A_{ji}$$

A^t heißt die zu A transponierte Matrix

(ii) $(*)$ ist bijektiv, da offenbar $\forall_{A\in M(m\times n)} (A^t)^t = A$. Ferner gilt:

$$\forall_{A,\tilde{A}\in M(m\times n)} \quad (A+\tilde{A})^t = A^t + \tilde{A}^t \qquad (1)$$

$$B\in M(n\times k),\ \lambda\in K \quad (\lambda A)^t = \lambda A^t \qquad (2)$$

$$(\Rightarrow AB\in M(m\times k),\ (AB)^t\in M(k\times m)) \quad (AB)^t = \underbrace{B^t}_{\in M(k\times n)}\ \underbrace{A^t}_{\in M(n\times m)} \qquad (3)$$

Insbesondere ist also $(*)$ ein K-Vektorraum-Isomorphismus.

[Zu (1), (2): trivial. Zu (3):

$$\forall_{\substack{i\in\{1,\ldots,k\}\\ j\in\{1,\ldots,m\}}} \quad (AB)^t{}_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{\ell=1}^{n} \underbrace{A_{j\ell}}_{A^t_{\ell j}}\ \underbrace{B_{\ell i}}_{B^t_{i\ell}}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} B^t_{i\ell}\, A^t_{\ell j} = (B^t A^t)_{ij}. \ ]$$

4.26 Lemma Seien K ein Körper und $n\in\mathbb{N}_+$.

Dann gilt für $A\in M_n(K)$:

(i) $\forall_{B\in M_n(K)} \left(\underbrace{BA = E_n}_{\text{d.h. „}B\text{ ist Linksinverses zu }A\text{"}} \iff \underbrace{AB = E_n}_{\text{d.h. „}B\text{ ist Rechtsinverses zu }A\text{"}} \right)$

(ii) Falls $B\in M_n(K)$ mit $BA = AB = E_n$ existiert, so ist B mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt.

Beweis: Zu (i) Es genügt „⇒" zu beweisen (aus Symmetriegründen).

Aus $BA = E_n$ folgt $\Phi_B \circ \Phi_A \underset{4.23(4)}{=} \Phi_{BA} = \Phi_{E_n} = id_{K^n}$.

Mit $\Phi_B \circ \Phi_A = id_{K^n}$ ist erst recht auch $\Phi_A \in \mathrm{Hom}(K^n, K^n)$ injektiv, also $\mathrm{Kern}\,\Phi_A = \{0\}$. Aus 4.22 folgt daher

$$n = \dim K^n = \underbrace{\dim(\mathrm{Kern}\,\Phi_A)}_{=0} + \dim(\mathrm{Bild}\,\Phi_A),$$

also ist Φ_A auch surjektiv, d.h. bijektiv, also folgt weiter

$$\Phi_A^{-1} = \underbrace{\Phi_B \circ \Phi_A}_{\text{s.o. } = id_{K^n}} \circ \Phi_A^{-1} = \Phi_B,$$

also

$$\Phi_{AB} \underset{4.23(4)}{=} \Phi_A \circ \underbrace{\Phi_B}_{=\Phi_A^{-1}} = id_{K^n} = \Phi_{E_n}.$$

Aus $\Phi_{AB} = \Phi_{E_n}$ folgt wegen der Isomorphie von Φ (vgl. 4.23(3)), daß $AB = E_n$ gilt.

Zu (ii): Aus $BA = AB = E_n$ folgt nach Beweis von (i), daß $\Phi_B = \Phi_A^{-1}$, also ist Φ_B durch durch A eindeutig bestimmt, also ist wegen der Isomorphie von Φ auch B durch A eindeutig bestimmt, q.e.d.

4.27 Def.: Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_+$ und $A \in M_n(K)$.

A heißt invertierbar $:\Longleftrightarrow \exists_{B \in M_n(K)}\ BA = AB = E_n$.

Im Falle der Invertierbarkeit von A ist B wie in der Def. nach 4.26 (ii) eindeutig bestimmt und wir bezeichnen dann B mit A^{-1} und nennen $A^{-1} \in M_n(K)$ die zu A inverse Matrix.

4.28 Satz Seien $A, \tilde{A} \in M_n(K)$ (K Körper, $n \in \mathbb{N}_+$).

(i) Folgende 9 Aussagen sind paarweise äquivalent:

A ist invertierbar, (1)

$\exists_{B \in M_n(K)} \; BA = E_n$, (2)

$\exists_{B \in M_n(K)} \; AB = E_n$, (3)

Die Zeilenvektoren von A bilden eine Basis von K^n, (4)

Die Spaltenvektoren von A " " ", (5)

$\operatorname{Rang} A = n$, (6)

$\underbrace{\phi_A}_{x \mapsto Ax} : K^n \to K^n$ ist bijektiv, (7)

" " injektiv, (8)

" " surjektiv. (9)

(ii) A invertierbar und $\tilde{A}$ invertierbar
$\Rightarrow A\tilde{A}$ invertierbar und $(A\tilde{A})^{-1} = \tilde{A}^{-1} A^{-1}$, } (10)

A invertierbar $\Rightarrow \bar{A}^{-1}$ invertierbar und $(\bar{A}^{-1})^{-1} = A$. (11)

(iii) A invertierbar $\Rightarrow A^t$ invertierbar und $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. (12)

Beweis: Zu (i):

(1)(2)(3)
⇕
(7)(8)(9)
⇕
(4)(5)(6)

(1) ist äquivalent zu (2) und (3) nach 4.26(i).

(7) ist äquivalent zu (8) und (9) nach 4.22 (Rang-Nullitäts-Satz)

Die Äquivalenz von (4), (5) und (6) ist klar nach 4.24

(1)⇒(7): Aus $BA = AB = E_n$ folgt (vgl. früher)

$\phi_B \circ \phi_A = \phi_A \circ \phi_B = id_{K^n}$, also ϕ_A bijektiv und $\phi_B = \bar{\phi}_A^{-1}$.

(7)⇒(1): Sei $\phi_A \in \operatorname{Hom}(K^n, K^n)$ bijektiv. Dann folgt aus 4.17(v), daß auch $\bar{\phi}_A^{-1} \in \operatorname{Hom}(K^n, K^n)$. Nach 4.23(3) existiert daher $B \in M_n(K)$ mit $\phi_B = \bar{\phi}_A^{-1}$ und es folgt $\phi_A \circ \phi_B = \phi_B \circ \phi_A = id_{K^n}$, d.h. $\phi_{AB} = \phi_{BA} = \phi_{E_n}$, also wegen der Injekt. von ϕ: $AB = BA = E_n$, also A invertierbar.

(9) ist äquivalent zu (5) wegen

$$\underbrace{\phi_A(K^n)}_{=K^n \text{ genau dann, wenn } \phi_A \text{ surjektiv}} = \phi_A(\operatorname{Spann}\{e_1^{(n)},\dots,e_n^{(n)}\}) = \underbrace{\operatorname{Spann}\{\phi_A(e_1^{(n)}),\dots,\phi_A(e_n^{(n)})\}}_{=K^n \text{ genau dann, wenn } \{A_{\cdot 1},\dots,A_{\cdot n}\} \text{ Basis von } K^n}$$

($A_{\cdot 1}$ über $\phi_A(e_1^{(n)})$, $A_{\cdot n}$ über $\phi_A(e_n^{(n)})$)

Zu (ii): (10) ist klar wegen $(\tilde{A}^{-1}\underbrace{A^{-1}}_{E_n})(A\tilde{A}) = \tilde{A}^{-1}\tilde{A} = E_n$ und

$(A\underbrace{\tilde{A}}_{E_n})(\tilde{A}^{-1}A^{-1}) = AA^{-1} = E_n$.

(11) folgt aus $AA^{-1} = A^{-1}A$ und 4.27.

Zu (iii): (11) folgt aus $\underbrace{(A^{-1})^t A^t}_{\text{11.4.25(3)}} = \underbrace{A^t(A^{-1})^t}_{\longrightarrow} = E_n$ und 4.27, q.e.d.

$(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t = E_n^t = E_n$

$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = E_n^t = E_n$

4.29 Satz Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt:

$$GL(n,K) := \{A \in M_n(K) \mid A \text{ invertierbar}\}$$

ist eine Gruppe mit der Matrizen-Multiplikation als Verknüpfung.

$GL(n,K)$ heißt die (n-te) allgemeine lineare Gruppe über K

= general linear group

Beweis: klar nach 4.28 (ii).

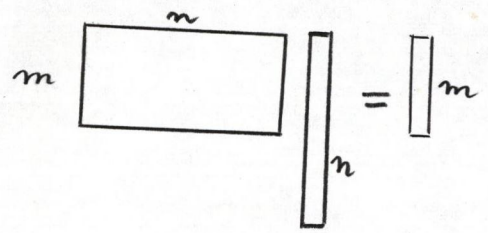
§ 5 Lineare Gleichungssysteme

5.1 Gegeben seien eine Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in M(m \times n, K)$ und ein Vektor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$, ($K$ bel. Körper, $m, n \in \mathbb{N}_+$) } Vor.

(i) Def.: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ mit

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} (LI)$$

(d.h. $Ax = b$, d.h. $\underbrace{\Phi_A}_{\in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)}(x) = b$)



heißt **Lösung des linearen inhomogenen Gleichungssystems** (LI)

Man sagt: „(LI) besteht aus m Gleichungen über K in n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$".

Im Spezialfall $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{K^m}$ erhält man

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} (L)$$

(L) heißt ein **lineares homogenes Gleichungssystem** (genauer: „das zu (LI) gehörige lineare homogene Gl.syst.")

(L) besitzt stets die Lösung $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{K^n}$, die sog. **Nullösung**.

(LI) kann lösbar oder unlösbar sein, genauer gilt:

(ii) **Satz** Seien $A \in M(m \times n, K)$, $b \in K^m$ wie in der Vor. Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ sei wieder $A_{\cdot j} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in K^m$ der

j-te Spaltenvektor von A.

Ferner sei $r := \operatorname{Rang} A$ (also $0 \le r \le \min\{m,n\}$, vgl. 4.24) und

$$\boxed{\text{Lös}(A,b)} := \{x \in K^n \mid x \text{ Lösung von } \underbrace{(LI)}_{Ax=b}\},$$

sowie

$$\text{Lös}(A,0) = \{x \in K^n \mid x \text{ Lösung von } \underbrace{(L)}_{Ax=0}\} \underset{\text{klar}}{=} \operatorname{Kern} \phi_A$$

($\operatorname{Kern} \phi_A$ ist Untervektorraum von K^n)

Dann gilt:

1.) $\text{Lös}(A,0)$ ist ein $\underbrace{(n-r)}_{\ge 0}$-dim. Untervektorraum von K^n

2.) $\underbrace{\text{Lös}(A,b) \neq \emptyset}_{\text{d.h. } (LI) \text{ ist lösbar}} \iff b \in \underbrace{\operatorname{Spann}\{A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot n}\}}_{r\text{-dim. Untervektorraum von } K^m \text{ (vgl. 4.24)}}$ ($b \in K^m$)

$$\underset{\text{klar}}{\iff} \operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} \underbrace{(A,b)}_{\in M(m \times (n+1), K)}$$

d.h. $\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

(d.h. der Rang der „Systemmatrix" A ist gleich dem Rang der „erweiterten Systemmatrix" (A,b))

3.) Im Falle $\text{Lös}(A,b) \neq \emptyset$ gilt:

$$\forall_{x_0 \in \text{Lös}(A,b) \subset K^n} \quad \text{Lös}(A,b) = x_0 + \text{Lös}(A,0),$$

$$\left(:= \{x_0 + x \mid x \in \text{Lös}(A,0)\}\right)$$

(d.h. man erhält alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems (LI), indem man zu einer beliebigen speziellen Lösung von (LI) alle Lösungen des zugehörigen homogenen Gleichungssystems (L) hinzuaddiert.)

[Beweis: Zu 1.) $\Phi_A : K^n \to K^m$ ist K-linear, also folgt aus 4.22:

$$\underbrace{\dim K^n}_{=n} = \dim(\operatorname{Kern}\Phi_A) + \dim\underbrace{(\operatorname{Bild}\Phi_A)}_{=\Phi_A(K^n)}$$

$$\Phi_A(K^n) = \Phi_A(\operatorname{Spann}\{e_1^{(n)},\dots,e_n^{(n)}\})$$

$$\overset{\Phi_A \text{ linear}}{=} \operatorname{Spann}\{\underbrace{\Phi_A(e_1^{(n)})}_{=A_{\cdot 1}},\dots,\underbrace{\Phi_A(e_n^{(n)})}_{=A_{\cdot n}}\}$$

$$\overset{4.23(1)}{=} \text{Spaltenraum von } A \overset{\text{Def.}}{=} r$$

$$\dim(\underbrace{\operatorname{Kern}\Phi_A}_{=\text{Lös}(A,0)}) = n - r$$

Zu 2.): Für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j^{(n)} \in K^n$ gilt:

$$x \in \text{Lös}(A,b) \Leftrightarrow Ax = b \Leftrightarrow \Phi_A(x) = b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j A_{\cdot j} = b,$$

$$\Phi_A(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{\Phi_A(e_j^{(n)})}_{=A_{\cdot j}}$$

Damit ist 2.) klar.

Zu 3.): Sei $x_0 \in \text{Lös}(A,b)$, d.h. $\Phi_A(x_0) = b$ (denn $\Phi_A(x_0) = Ax_0$). Dann folgt für alle $x \in K^n$:

$$x \in \text{Lös}(A,b) \Leftrightarrow \Phi_A(x) = \Phi_A(x_0) \Leftrightarrow \Phi_A(x - x_0) \overset{\Phi_A \text{ linear}}{=} \Phi_A(x) - \Phi_A(x_0) = 0$$

($\Phi_A(x) = Ax$, $\Phi_A(x_0) = b$)

$$\Leftrightarrow x - x_0 \in \operatorname{Kern}\Phi_A \overset{\text{s.o.}}{=} \text{Lös}(A,0) \Leftrightarrow x \in x_0 + \text{Lös}(A,0),$$

q.e.d.]

5.2 („Gaußsches Eliminationsverfahren" zur Lösung eines linearen Gleichungssystems)

Wir betrachten wie in 5.1 ein lineares Gleichungssystem über K mit m Gleichungen in n Unbekannten.

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ (m) & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (LI)$$

(i) **Def.:** Die folgenden Umformungen des linearen Gleichungssystems (LI) heißen **elementare Umformungen**:

Typ a): die Ersetzung der i-ten Gleichung (i) durch die Differenz $(i) - \lambda \cdot (j)$ der i-ten Gleichung und der λ-fachen j-ten Gleichung (für $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$, $\lambda \in K$ bel.)

Typ b): die Vertauschung zweier Gleichungen.

Einer elementaren Umformung eines Gleichungssystems entspricht eine **elementare Zeilenumformung** der erweiterten Systemmatrix (A, b), und zwar

bei Typ a): die Ersetzung der i-ten Zeile durch die Differenz der i-ten Zeile und der λ-fachen j-ten Zeile,

bei Typ b): die Vertauschung zweier Zeilen.

Bei einer elementaren Umformung bleibt offenbar die Menge der Lösungen unverändert. [Beachte bei Typ a): Ist x Lösung von (j) und von $(i) - \lambda(j)$, so ist x auch Lösung von $(i) = \big((i) - \lambda(j)\big) + \lambda \cdot (j)$.]

(iii) **Satz** 1) Das lineare Gleichungssystem (LI) läßt sich durch endlich viele elementare Umformungen „in kanonischer Weise" (vgl. hierzu (iii) Beispiel) in ein lineares Gleichungssystem (LI^*) der folgenden einfacheren Gestalt verwandeln.

Dabei ist $(j_1, \dots, j_n)$ eine Permutation von $(1, \dots, n)$ und $r \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{ll}
(1^*) & \underbrace{a^*_{11}}_{\neq 0} x_{j_1} + \dots\dots + a^*_{1r} x_{j_r} + \dots\dots + a^*_{1n} x_{j_n} = b^*_1 \\
\vdots & \\
(r^*) & \underbrace{a^*_{rr}}_{\neq 0} x_{j_r} + \dots\dots + a^*_{rn} x_{j_n} = b^*_r \\
(r+1^*) & 0 = b^*_{r+1} \\
\vdots & \vdots \\
(m^*) & 0 = b^*_m
\end{array}
\qquad \Big\} (LI^*)
$$

2) Nach (i) hat (LI^*) dieselben Lösungen $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ wie (LI).

Offenbar ist (LI^*) lösbar genau dann, wenn $b^*_{r+1} = \dots = b^*_m = 0$.

Ist dies der Fall, lassen sich alle Lösungen von (LI^*) unter Benutzung von 5.1 (ii) 3.) in einfacher Weise wie folgt bestimmen:

Zunächst findet man leicht eine spezielle Lösung $x_0 := \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$ von (LI^*), z.B. indem man $\tilde{x}_{j_{r+1}} := \dots := \tilde{x}_{j_n} := 0$ setzt und dann der Reihe nach $\tilde{x}_{j_r}, \tilde{x}_{j_{r-1}}, \dots, \tilde{x}_{j_1}$ eindeutig so bestimmt, daß $(r^*), (r-1^*), \dots, (1^*)$ gelten.

Um alle Lösungen des zu (LI^*) korrespondierenden homogenen linearen Gleichungssystems (L^*) zu finden, nimmt man $\lambda_1 := x_{j_{r+1}}, \dots, \lambda_{n-r} := x_{j_n}$ als „Variable" und berechnet $x_{j_r}, x_{j_{r-1}}, \dots, x_{j_1}$ als Linearkombination von $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$ so, daß auch die Gleichungen $(r^*), (r-1^*), \dots, (1^*)$ erfüllt sind, (vgl. auch hierzu das Beispiel in (iii)).

(iii) Beispiel $K = \mathbb{R}$, $m = 4$ Gleichungen in $n = 5$ Unbekannten

$$(LI)\quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 5x_5 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \end{cases} \qquad (A, b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 4 & -7 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & -4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch die 4 elementaren Umformungen

2. Gl. $\mapsto$ 2. Gl. + 1. Gl.
3. Gl. $\mapsto$ 3. Gl. $-$ 2 $\times$ (1. Gl.)
4. Gl. $\mapsto$ 4. Gl. $-$ 1. Gl.
Vertauschung 2. Gl. $\leftrightarrow$ 3. Gl.

erhält man:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &=& 0 \\ -x_3 - 2x_4 + 3x_5 &=& -1 \\ 3x_4 - 6x_5 &=& 3 \\ -2x_3 - x_4 &=& 1 \end{array} \qquad \left| \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

Durch die weiteren 2 elementaren Umformungen

4. Gl. $\mapsto$ 4. Gl. $-$ 2 $\times$ (2. Gl.) = 3. Gl.
4 Gl. $\mapsto$ 4. Gl. $-$ 3. Gl.

erhält man:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &=& 0 \\ -x_3 - 2x_4 + 3x_5 &=& -1 \\ 3x_4 - 6x_5 &=& 3 \\ 0 &=& 0 \end{array} \qquad \left| \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

Umnumerierung der Variablen: $(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5) := (2, 3, 4, 1, 5)$

$$(LI^*)\quad \begin{cases} -x_2 + x_3 - x_4 + 2x_1 + x_5 = 0 \\ -x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -1 \\ 3x_4 - 6x_5 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \left| \quad \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ & \boxed{-1} & -2 & 0 & 3 & -1 \\ & & \boxed{3} & 0 & -6 & 3 \\ & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

(LI^*) ist lösbar wegen

Spezielle Lösung von (LI^*):

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_5 = 0 \quad , \quad 3\tilde{x}_4 = 3 + 6\tilde{x}_5 = 3 \, , \text{ d.h. } \tilde{x}_4 = 1 \, ,$$

$$\tilde{x}_3 = 1 - 2\tilde{x}_4 + 3\tilde{x}_5 = 1 - 2 = -1 \, ,$$

$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 - \tilde{x}_4 + 2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_5 = -1 - 1 = -2 \, ,$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allg. Lösung von (L^*):

$$x_1 = \lambda_1 \, ,$$

$$x_5 = \lambda_2 \, ,$$

$$3x_4 = 6x_5 = 6\lambda_2 \, , \quad x_4 = 2\lambda_2 \, ,$$

$$x_3 = -2x_4 + 3x_5 = -4\lambda_2 + 3\lambda_2 = -\lambda_2 \, ,$$

$$x_2 = x_3 - x_4 + 2x_1 + x_5 = -\lambda_2 - 2\lambda_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \, ,$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ -\lambda_2 \\ 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allg. Lösung von (LI^*) = Allg. Lösung von (LI)

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Bemerkung Oft werden als weitere „elementare Umformungen" von (LI) solche vom Typ c) betrachtet:

Typ c): die Ersetzung der i-ten Gleichung durch die λ-fache i-te Gleichung (für $i \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda \in \underbrace{K^*}_{K - \{0\}}$)

Einer solchen Umformung entspricht als „elementare Zeilenumformung" der erweiterten Systemmatrix die Ersetzung der i-ten Zeile durch die λ-fache i-te Zeile.

Auch bei einer elementaren Umformung vom Typ c) bleibt offenbar die Lösungsgesamtheit unverändert

---

Im obigen Beispiel ist es z.B. „vernünftig", die Gleichung $3x_4 - 6x_5 = 3$ mit $\frac{1}{3}$ zu multiplizieren, was auf $x_4 - 2x_5 = 1$ führt.

§ 6 Die Determinante

Sei im folgenden stets $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Wir hatten in 3.2 3) die Permutationsgruppe $\overset{(S_n, \circ)}{\overset{\shortparallel}{S_n}}$ aller bijektiven Abbildungen von $\{1, \dots, n\}$ auf sich eingeführt.

Nach Ü 25 hat S_n genau $n!$ Elemente und ist im Falle $n \geq 3$ nicht abelsch.

$\boxed{6.1}$ Def. (i) Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ definieren wir

$$\underset{\underset{\tau_{ij}^{(n)}}{\shortparallel}}{\tau_{ij}} \in S_n \quad \text{durch} \quad \tau_{ij}(i) := j, \ \tau_{ij}(j) = i, \quad \tau_{ij}(k) = k \text{ für alle } k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$$

(τ_{ij} vertauscht also i mit j und läßt alle anderen Elemente fest.) Offenbar gilt $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ und $\tau_{ij} \circ \tau_{ij} = id$, d.h. $\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}$.

(ii) $\tau \in S_n$ heißt Transposition $:\Longleftrightarrow \exists_{\substack{i,j \in \{1,\dots,n\} \\ \underbrace{i \neq j}_{\text{oder äquivalent: } i<j}}} \ \tau = \tau_{ij}$

$\boxed{6.2}$ Lemma Jede Transposition $\tau \in S_n$ ist Komposition einer ungeraden (endlichen) Anzahl von speziellen Transpositionen vom Typ $\tau_{k,k+1}$ $(k \in \{1, \dots, n-1\})$.

Beweis: Es existieren also $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$, mit $\tau = \tau_{ij}$.

Dann gilt

$$(j \underset{\text{s.o.}}{>}) i \geq 2 \Rightarrow \overset{\overset{\tau}{\shortparallel}}{\tau_{ij}} = \tau_{1i} \circ \tau_{1j} \circ \tau_{1i} \qquad (1)$$

[Zu (1): Sei also $(j >) i > 1$. Dann folgt

$$\tau_{1i} \underbrace{\tau_{1j} \underbrace{\tau_{1i}(i)}_{1}}_{j} = j = \tau_{ij}(i), \quad \tau_{1i} \underbrace{\tau_{1j} \underbrace{\tau_{1i}(j)}_{j}}_{1} = i = \tau_{ij}(j)$$

und $\forall_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i,j\}} \ \tau_{1i} \underbrace{\tau_{1j} \underbrace{\tau_{1i}(k)}_{k}}_{k} = k = \tau_{ij}(k)$.]

Wegen (1) genügt es zum Nachweis der Behauptung zu zeigen, daß gilt:

$$\forall_{\ell \in \{2,\dots,n\}} \; \tau_{1\ell} \text{ ist Komposition einer ungeraden Anzahl von Transpositionen vom Typ } \tau_{k,k+1} \; (k \in \{1,\dots,n-1\}). \quad (2)$$

(Beachte: Im Falle $i=1$ gilt $\tau = \tau_{ij} = \tau_{1j}$, also folgt die Beh. aus (2), und im Falle $i \geq 2$ folgt die Beh. aus (1) und (2), da die Summe von drei ungeraden Zahlen ungerade ist.)

[Zu (2): Beweis durch endliche Induktion über $\ell \in \{2,\dots,n\}$.

$\ell = 2$: Dann $\tau_{1\ell} = \tau_{12}$, also (2) klar

Schluß von $\ell \in \{2,\dots,n-1\}$ auf $\ell+1$: Angenommen $\tau_{1\ell}$ ist Komposition einer ungeraden Anzahl von Transpositionen vom Typ $\tau_{k,k+1}$. Dann folgt mittels (1):

$$\tau_{1,\ell+1} = \overbrace{\tau_{1\ell}}^{\mathrm{id}} \underbrace{\tau_{1\ell} \tau_{1,\ell+1} \overbrace{\tau_{1\ell}}^{\mathrm{id}} \tau_{1\ell}}_{\overset{(1)}{=} \tau_{\ell,\ell+1}} = \tau_{1\ell} \tau_{\ell,\ell+1} \tau_{1\ell},$$

also ist auch $\tau_{\ell,\ell+1}$ Komposition einer ungeraden Anzahl von Transpositionen vom Typ $\tau_{k,k+1}$] , q.e.d.

6.3 Satz Jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist Komposition von endlich vielen Transpositionen vom Typ $\tau_{k,k+1}$ $(k \in \{1,\dots,n-1\})$.

Beweis: Auf Grund von 6.2 genügt es zu zeigen, daß gilt:

Jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist Komposition von endlich vielen Transpositionen. $\quad (*)$

Beweis von $(*)$ durch vollständige Induktion über $n \geq 2$:

$n = 2$: Es gibt nur die beiden Elemente $\tau_{12}^{(2)}$ und $\mathrm{id} = (\tau_{12}^{(2)})^2$ in S_2, also Beh. klar.

Schluß von $n \geq 2$ auf $n+1$: Sei $\sigma \in S_{n+1}$. Dann gilt für

$$\alpha := \begin{cases} \overbrace{\tau^{(n+1)}_{n+1,\sigma(n+1)}}^{=:\tau_0 \text{ Transposition}} \circ \sigma & , \text{falls } \sigma(n+1) \neq n+1 \\ \sigma & , \text{falls } \sigma(n+1) = n+1 \end{cases} \Bigg\} \in S_n$$

offenbar $\alpha(n+1) = n+1$, also $\tilde{\alpha} := \alpha|\{1,\dots,n\} \in S_n$.

Nach Ind. Vor. existieren endlich viele Transpositionen $\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_\ell \in S_n$ mit

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\tau}_1 \circ \dots \circ \tilde{\tau}_\ell .$$

Für jedes $i \in \{1,\dots,\ell\}$ sei $\tau_i \in S_{n+1}$ die eindeutig bestimmte Transposition (nicht nur Permutation!) mit

$$\tau_i|\{1,\dots,n\} = \tilde{\tau}_i \quad \text{und} \quad \tau_i(n+1) = n+1 .$$

Dann gilt offenbar:

$$\left\{ \begin{matrix} \tau_0 \circ \sigma \\ \sigma \end{matrix} \right\}_{\text{s.o.}} = \alpha = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_\ell ,$$

also

$$\sigma = \begin{cases} \overbrace{\tau_0 \circ \tau_0}^{\text{id}} \circ \sigma = \tau_0 \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_\ell \\ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_\ell \end{cases} \Bigg\} \begin{matrix} \text{Produkt von endlich} \\ \text{vielen Transpositionen,} \\ \text{q.e.d.} \end{matrix}$$

6.4 Satz Es existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{sign}: S_n \longrightarrow \underbrace{\{1,-1\}}_{\text{multipl. Gruppe}}$$

$$\sigma \longmapsto \operatorname{sign}\sigma$$

„Signum von σ"

mit $\operatorname{sign}\tau = -1$ für jede Transposition $\tau \in S_n$, nämlich

$$\forall_{\sigma\in S_n}\ \boxed{\operatorname{sign}\sigma = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}} \quad (*)$$

Beweis: Wir definieren $\operatorname{sign}: S_n \longrightarrow \mathbb{R}-\{0\}$ durch $(*)$.

Dann folgt

$$\forall_{\sigma\in S_n}\ \operatorname{sign}\sigma \in \{1,-1\} \qquad (1)$$

[Zu (1): $\mathcal{P}_2 := \mathcal{P}_2(\{1,\dots,n\})$ bezeichne die Menge aller 2-elementigen Teilmengen von $\{1,\dots,n\}$. Sei

$f: \mathcal{P}_2 \to \mathbb{N}_+$ def. durch $\forall_{N\in\mathcal{P}_2} f(N) := |j-i|$, falls $N=\{i,j\}$.

Dann gilt:

$$|\operatorname{sign}\sigma| \underset{(*)}{=} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{|\sigma(j)-\sigma(i)|}{|j-i|} = \prod_{\{i,j\}\in\mathcal{P}_2} \frac{f(\{\sigma(i),\sigma(j)\})}{f(\{i,j\})}$$

($\sigma(\{i,j\})$ über $\{\sigma(i),\sigma(j)\}$)

$$= \frac{\prod_{N\in\mathcal{P}_2} f(\sigma(N))}{\prod_{N\in\mathcal{P}_2} f(N)} = 1.$$

↑ Dann Zähler = Nenner wegen der Bijektivität von $\mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$, $N \longmapsto \sigma(N)$]

14.1.03 (22.)

Wir zeigen als nächstes:

$$\forall_{\sigma,\tau\in S_n}\ \operatorname{sign}(\sigma\circ\tau) = (\operatorname{sign}\sigma)(\operatorname{sign}\tau), \qquad (2)$$

(d.h. $\operatorname{sign}: S_n \to \{1,-1\}$ ist Gruppenhom.)

[Zu (2):

$$\operatorname{sign}(\sigma\circ\tau) \underset{(*)}{=} \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{j-i}$$

$$= \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)} \underbrace{\prod_{i<j} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}}_{\| (*)\ \operatorname{sign}\tau}$$

Zu zeigen bleibt daher

$$\prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)} = \operatorname{sign}\sigma. \qquad (3)$$

Zu (3): Wir definieren $g: \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ durch $\forall_{N\in\mathcal{P}_2}\ g(N) := \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$, falls $N=\{i,j\}$ (g ist wohldefiniert!)

Dann gilt:

$$\text{l.S. von (3)} = \prod_{\{i,j\}\in\mathcal{P}_2} g(\underbrace{\{\tau(i),\tau(j)\}}_{\tau(\{i,j\})}) = \prod_{N\in\mathcal{P}_2} g(\tau(N))$$

$$\overset{\uparrow}{=} \prod_{N\in\mathcal{P}_2} g(N) = \prod_{\{i,j\}\in\mathcal{P}_2} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} \underset{(*)}{=} \operatorname{sign}\sigma.]$$

da $\mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, $N \mapsto \tau(N)$ bijektiv

Ferner gilt

$$\forall_{k\in\{1,\dots,n-1\}}\ \operatorname{sign}\tau_{k,k+1} = -1 \qquad (4)$$

[Zu (4):

$$\operatorname{sign}\tau_{k,k+1} = \prod_{i<j} \frac{\overbrace{\tau_{k,k+1}(j)-\tau_{k,k+1}(i)}^{<0 \text{ nur für } (i,j)=(k,k+1),\ \text{sonst } >0}}{\underbrace{j-i}_{>0}} < 0,$$

also $=-1$ nach (1).]

Wir folgern aus (4), daß allgemeiner

$$\forall_{\substack{\tau\in S_n,\\ \tau \text{ Transposition}}}\ \operatorname{sign}\tau = -1 \qquad (5)$$

[Zu (5): Nach 6.2 existieren $\ell\in\mathbb{N}$ und $2\ell+1$ Transpositionen $\tau_1,\dots,\tau_{2\ell+1}\in S_n$ vom Typ $\tau_{k,k+1}$ ($k\in\{1,\dots,n-1\}$) mit

$$\tau = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_{2\ell+1},$$

also folgt offenbar aus (2):

$$\operatorname{sign}\tau = \prod_{j=1}^{2\ell+1} \underbrace{\operatorname{sign}(\tau_j)}_{\substack{=-1 \\ (4)}} = (-1)^{2\ell+1} = -1. \quad]$$

Wegen (1), (2) und (5) haben wir gezeigt, daß sign wie in (*) alle gewünschten Eigenschaften hat.

Zu zeigen bleibt noch die Eindeutigkeit. Sei $\widetilde{\operatorname{sign}} : S_n \to \{1,-1\}$ ein beliebiger Gruppenhomom. mit $\widetilde{\operatorname{sign}}\,\tau = -1$ für jede Transposition $\tau \in S_n$. Zu zeigen ist:

$$\widetilde{\operatorname{sign}} = \operatorname{sign}.$$

Beweis hiervon: Sei $\sigma \in S_n$ beliebig. Nach 6.3 existieren endlich viele Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_k \in S_n$ mit

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k.$$

Dann folgt

$$\widetilde{\operatorname{sign}}\,\sigma = \prod_{j=1}^{k} \underbrace{\widetilde{\operatorname{sign}}\,\tau_j}_{\substack{=-1 \\ =\operatorname{sign}\tau_j}} = \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sign}\tau_j = \operatorname{sign}\sigma, \quad \text{q.e.d.}$$

($\widetilde{\operatorname{sign}}$ Hom. — sign Homom.)

<u>Bemerkung</u> $\forall_{\sigma \in S_n}\ \operatorname{sign}\sigma^{-1} = \operatorname{sign}\sigma$.

[wegen $1 = \underbrace{\operatorname{sign}(\mathrm{id})}_{\prod_{i<j} \frac{j-i}{j-i}} = \operatorname{sign}(\sigma^{-1} \circ \sigma) = (\operatorname{sign}\sigma^{-1})(\operatorname{sign}\sigma)$].

6.5 (i) **Bemerkung** Definiert man $\mathrm{Vorz}: \mathbb{R}-\{0\} \longrightarrow \{1,-1\}$ durch

$$\forall_{t\in\mathbb{R}-\{0\}} \quad \underbrace{\mathrm{Vorz}(t)}_{\text{„Vorzeichen von } t"} := \frac{t}{|t|} = \begin{cases} 1 & \text{für } t>0 \\ -1 & \text{für } t<0 \end{cases},$$

so gilt (vgl. 6.4 (*))

$$\forall_{\sigma\in S_n} \quad \underbrace{\operatorname{sign}\sigma}_{\in\{1,-1\}} \underset{\text{klar}}{=} \mathrm{Vorz}\left(\prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}\right) \underset{\text{klar}}{=} \prod_{i<j} \mathrm{Vorz}\left(\sigma(j)-\sigma(i)\right) \quad (1)$$

(i,j) heißt **Fehlstand von σ**, wenn $i<j$ und $\underbrace{\sigma(i)>\sigma(j)}_{\text{d.h. } \mathrm{Vorz}(\sigma(j)-\sigma(i))=-1}$

Dann gilt also stets nach (1)

$$\operatorname{sign}\sigma = (-1)^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \sigma} \quad (2)$$

Beispiele 1) $n=2$ $\qquad S_2 = \{\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}}_{=\mathrm{id}}, \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\}$

$\mathcal{P}_2(\{1,2\}) = \{\{1,2\}\}$

	kein Fehlstand	1 Fehlstand
		$(1,2)$
sign	1	-1

2) $n=3$, $\mathcal{P}_2(\{1,2,3\}) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$

$$S_3 = \{\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}}_{=\mathrm{id}}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\}$$

	kein Fehlst.	1 Fehlst. $(2,3)$	1 Fehlst. $(1,2)$	2 Fehlst. $(1,3),(2,3)$	2 Fehlst. $(1,2),(1,3)$	3 Fehlst. $(1,2),(1,3),(2,3)$
sign:	1	-1	-1	$(-1)^2=1$	$(-1)^2=1$	$(-1)^3=-1$

(ii) **Def.**: Eine Permutation $\sigma\in S_n$ heißt $\{\underline{\text{gerade}}/\underline{\text{ungerade}}\}$, wenn $\operatorname{sign}\sigma = \{\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\}$. Dann gilt:

Satz Für $\sigma\in S_n$ sind folgende drei Aussagen paarweise äquivalent:

(a) σ ist eine $\{\text{gerade}/\text{ungerade}\}$ Permutation (d.h. per def. $\operatorname{sign}\sigma = \{\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\}$).

(b) Die Anzahl der Fehlstände von σ ist $\{\text{gerade}/\text{ungerade}\}$

(c) σ ist Komposition einer $\{\text{geraden}/\text{ungeraden}\}$ Anzahl von Transpositionen.

[Beweis: „(a)⇔(b) gilt nach (2).

Zu „(a)⇔(c)": Nach 6.3 existieren endlich viele Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_k \in S_n$ mit $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$, also folgt aus der Homomorphie von sign: $\operatorname{sign}\sigma = \underbrace{(\operatorname{sign}\tau_1)}_{=-1} \cdot \dots \cdot \underbrace{(\operatorname{sign}\tau_k)}_{=-1} = (-1)^k$. Damit „(a)⇔(c)" klar.]

(iii) Def.:

$$A_n := \operatorname{Kern} \underbrace{\operatorname{sign}}_{\substack{S_n \to \{1,-1\} \\ \text{Homom.}}} = \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sign}\sigma = 1\} \underset{\text{(ii)}}{=} \text{Menge aller geraden Permutationen aus } S_n \quad (3)$$

ist ein Normalteiler von S_n (vgl. Ü 30(iv)), insbes. eine Untergruppe von S_n.

A_n heißt die alternierende Gruppe (zum Index n).

(Entsprechend hatten wir S_n als „die symmetrische Gruppe (zum Index n)" bezeichnet)

Also nach (i) oder (ii): $A_2 = \{\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}}_{id}\}$, $A_3 = \{\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}}_{id}, \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}}_{\tau_{12}\circ\tau_{23}}, \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}}_{\tau_{23}\circ\tau_{12}}\}$

Es gilt

$$\forall_{\tau \in S_n \setminus A_n} \quad \begin{array}{ccc} A_n & \longrightarrow & S_n \setminus A_n \\ \sigma & \longmapsto & \sigma\tau \ (=\sigma\circ\tau) \end{array} \text{ ist eine Bijektion} \quad (4)$$

[Zu (4): Die Abb. ist wohldefiniert (als Abb. in $S_n \setminus A_n$), denn für alle $\sigma \in A_n$ gilt $\sigma\tau \in S_n \setminus A_n$ wegen $\operatorname{sign}(\sigma\tau) = \underbrace{(\operatorname{sign}\sigma)}_{=1}\underbrace{(\operatorname{sign}\tau)}_{=-1} = -1$.

Sie ist injektiv, da aus $\sigma, \tilde\sigma \in A_n$ und $\sigma\tau = \tilde\sigma\tau$ folgt daß $\sigma = (\sigma\tau)\tau^{-1} = (\tilde\sigma\tau)\tau^{-1} = \tilde\sigma$.

Sie ist surjektiv, da aus $\tilde\tau \in S_n \setminus A_n$ folgt, daß $\tilde\tau = (\tilde\tau\,\tau^{-1})\tau$ mit $\operatorname{sign}(\tilde\tau\,\tau^{-1}) = \underbrace{(\operatorname{sign}\tilde\tau)}_{=-1}\underbrace{(\operatorname{sign}\tau^{-1})}_{\underset{\text{6.4 Bem.}}{=}\operatorname{sign}\tau = -1} = 1$, also $\tilde\tau\tau^{-1} \in A_n$.]

Aus (4) folgt sofort wegen $\#S_n = n!$:

$$\#A_n = \frac{n!}{2} \quad \text{und} \quad \left(\forall_{\tau \in S_n \setminus A_n} \; S_n = \underbrace{A_n}_{\substack{\text{alle} \\ \text{geraden} \\ \text{Permutat.}}} \dot\cup \underbrace{A_n\tau}_{\substack{S_n \setminus A_n \\ \underset{(4)}{=} \\ \text{alle} \\ \text{ungeraden} \\ \text{Permutationen}}}\right) \quad (5)$$

6.6 Wir identifizieren im folgenden eine Matrix

$A \in M_n(K) = M(n \times n, K)$ mit dem n-Tupel

$(A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot n}) \in \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{n}$ ihrer Spaltenvektoren:

$$A = (A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot n}).$$

Satz Es existiert genau eine Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \det & : & M_n(K) & \longrightarrow & K \\ \| & & \| & & \| \\ \det_n & & A & \longmapsto & \det A \\ & & \| & & \| \\ & & (A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot n}) & & \det(A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot n}) \end{array}$$

heißt „Determinante von A"

mit folgenden Eigenschaften:

(D1) det ist „multilinear (in den Spaltenvektoren)", d.h.

$$\forall_{i \in \{1,\dots,n\}} \; \forall_{v_1,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n \in K^n} \; \det(v_1, \dots, v_{i-1}, \bullet, v_{i+1}, \dots, v_n) : K^n \longrightarrow K$$

$$v \longmapsto \det(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

ist K-linear

d.h. „det hängt K-linear vom i-ten Spaltenvektor ab"

(D2) det ist „alternierend (in den Spaltenvektoren)", d.h.

$$\forall_{v_1,\dots,v_n \in K^n} \; \det(v_1, \dots, v_n) = 0, \text{ falls } i,j \in \{1,\dots,n\},\ i < j \text{ existieren mit } v_i = v_j,$$

(D3) $\det \underbrace{E_n}_{=(e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)})} = 1$,

nämlich

$$\forall_{A \in M_n(K)} \; \boxed{\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sign} \sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n}} \quad (*)$$

$(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

„Leibniz'sche Formel für die Determinante"

Bemerkung a) Aus (D1) und (D2) folgt

$$\forall_{v_1,\dots,v_n \in K^n} \quad \forall_{i,j \in \{1,\dots,n\},\ i<j} \quad \det(v_1,\dots,v_{i-1},\underline{v_j},v_{i+1},\dots,v_{j-1},\underline{v_i},v_{j+1},\dots,v_n) = -\det(v_1,\dots,v_n) \qquad (\widetilde{D2})$$

$\Leftarrow$ mit $\tau = \tau_{ij}$

$$\det(v_{\tau(1)},\dots,v_{\tau(n)})$$

und allgemeiner:

$$\forall_{v_1,\dots,v_n \in K^n} \quad \forall_{\sigma \in S_n} \quad \boxed{\det(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)}) = (\operatorname{sign}\sigma)\det(v_1,\dots,v_n)} \qquad (\widetilde{\widetilde{D2}})$$

b) Im Falle $1_K + 1_K \neq 0_K$ (d.h. $\operatorname{char}(K) \neq 2$, vgl. ü35) folgt umgekehrt aus $(\widetilde{D2})$ auch (D2).

[Beweis: Seien $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i<j$ und $v_1,\dots,v_n \in K^n$. Wir def.-en zur Abkürzung $\ell : K^n \times K^n \to K$ durch

$$\ell(v,w) := \det(v_1,\dots,v_{i-1},v,v_{i+1},\dots,v_{j-1},w,v_{j+1},\dots,v_n)$$

Zu a) Aus (D1) und (D2) folgt

$$0 \underset{(D2)}{=} \ell(v_i+v_j, v_i+v_j) \underset{\substack{(D1)\\ i.\text{ Spalte}}}{=} \ell(v_i, v_i+v_j) + \ell(v_j, v_i+v_j)$$

$$\underset{\substack{(D1)\\ j.\text{ Spalte}}}{=} \underbrace{\ell(v_i,v_i)}_{\underset{(D2)}{=}0} + \ell(v_i,v_j) + \ell(v_j,v_i) + \underbrace{\ell(v_j,v_j)}_{\underset{(D2)}{=}0},$$

also

$$\ell(v_j,v_i) = -\ell(v_i,v_j), \quad \text{d.h. es gilt } (\widetilde{D2}).$$

Zum Beweis von $(\widetilde{\widetilde{D2}})$: Sei $\sigma \in S_n$. Nach 6.3 existieren endlich viele Transpositionen $\tau_1,\dots,\tau_k \in S_n$ mit $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$. Dann folgt durch k-malige Anwendung von $(\widetilde{D2})$:

$$\det(v_1,\dots,v_n) \underset{(\widetilde{D}2)}{=} (-1)\det\Big(\underbrace{v_{\tau_1(1)}}_{=:w_1},\dots,\underbrace{v_{\tau_1(n)}}_{=:w_n}\Big) \qquad \big(\!\big(w_i = v_{\tau_1(i)}\big)\!\big)$$

$$\underset{(\widetilde{D}2)}{=} (-1)^2 \det\Big(\underbrace{v_{\tau_1\circ\tau_2(1)}}_{=w_{\tau_2(1)}},\dots,\underbrace{v_{\tau_1\circ\tau_2(n)}}_{=w_{\tau_2(n)}}\Big)$$

$$= \dots\dots$$

$$\underset{(\widetilde{D}2)}{=} (-1)^k \det\Big(\underbrace{v_{\tau_1\circ\dots\circ\tau_k(1)}}_{\sigma(1)},\dots,\underbrace{v_{\tau_1\circ\dots\circ\tau_k(n)}}_{\sigma(n)}\Big),$$

$$\det(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)}) = \underbrace{(-1)^k}_{\underset{\text{sign}(\sigma)}{\overset{\text{6.5(iii)}}{\|}}} \det(v_1,\dots,v_n).$$

Zu b): Aus $(\widetilde{D}2)$ folgt im Falle $v_i = v_j$:

$$\ell(v_i,v_j) \underset{\uparrow\, v_i=v_j}{=} \ell(v_j,v_i) \underset{(\widetilde{D}2)}{=} -\ell(v_i,v_j),$$

also

$$\underbrace{\ell(v_i,v_j)+\ell(v_i,v_j)}_{(1_K+1_K)\,\ell(v_i,v_j)} = 0$$

$1_K+1_K \neq 0$ Vor.

und daher

$$\det(v_1,\dots,v_n) \underset{\text{Def. von } \ell}{=} \ell(v_i,v_j) = 0, \quad \text{q.e.d.}\ \big]$$

Beweis (des Satzes):

1.) Angenommen $\det: M_n(K) \to K$ ist eine Abbildung mit den Eigenschaften (D1), (D2), (D3).
Wir zeigen, daß dann notwendig (*) gilt.

$$\det A = \det(A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot n})$$

$$= \det\Big(\sum_{\sigma_1=1}^{n} a_{\sigma_1 1} e^{(n)}_{\sigma_1}, \dots, \sum_{\sigma_n=1}^{n} a_{\sigma_n n} e^{(n)}_{\sigma_n}\Big)$$

$$= \sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)\in\{1,\dots,n\}^n} a_{\sigma_1 1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma_n n} \underbrace{\det(e^{(n)}_{\sigma_1}, \dots, e^{(n)}_{\sigma_n})}_{\overset{(D2)}{=} 0,}$$

(D1): n-mal angewandt

falls $\#\underbrace{\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\}}_{\subset\{1,\dots,n\}} < n$

d.h. falls $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ keine Permutation von $\{1,\dots,n\}$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n} \underbrace{\det(e^{(n)}_{\sigma(1)}, \dots, e^{(n)}_{\sigma(n)})}_{\overset{(D2)}{=} (\operatorname{sign}\sigma)\det(e^{(n)}_1,\dots,e^{(n)}_n) \overset{(D3)}{=} (\operatorname{sign}\sigma)\cdot 1}$$

$(\sigma_1,\dots,\sigma_n) = (\sigma(1),\dots,\sigma(n))$

$\overset{(D2)}{=}$ folgt aus (D1), (D2) nach Bem. a)

$$= \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sign}\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n}.$$

2.) Zu zeigen bleibt, daß durch (*) eine Abbildung $\det: M_n(K) \to K$ mit (D1), (D2) und (D3) definiert wird.

Zu (D1): Klar, denn für jedes i hängt die rechte Seite von (*) K-linear von $A_{\cdot i} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \in K^n$ ab.

Zu (D2): Seien $i, j \in \{1,\dots,n\}$, $i<j$ und sei $A_{\cdot i} = A_{\cdot j}$, d.h. $\forall_{k\in\{1,\dots,n\}} a_{ki} = a_{kj}$.

Sei $\tau := \tau_{ij}$. Nach 6.5(5) gilt

$$S_n = A_n \dot\cup \underbrace{A_n\tau}_{= S_n \setminus A_n}.$$

Daher

$$\det A \underset{(*)}{=} \sum_{\sigma \in A_n} a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n} - \sum_{\sigma \in A_n} a_{(\sigma\tau)(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{(\sigma\tau)(n),n}$$

$$= 0$$

↖ wegen $a_{\sigma(i)i} \underset{\text{Vor.}}{=} a_{\sigma(i)j} \underset{i=\tau(j)}{=} a_{(\sigma\tau)(j),j}$,

$$a_{\sigma(j)j} = a_{\sigma(j)i} \underset{j=\tau(i)}{=} a_{(\sigma\tau)(i),i},$$

$\forall k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i,j\}$ $a_{\sigma(k)k} \underset{k=\tau(k)}{=} a_{(\sigma\tau)(k),k}$.

Zu (D3):

$$\det \underbrace{E_n}_{=(\delta_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}} \underset{(*)}{=} \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sign}\sigma) \underbrace{\delta_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot \delta_{\sigma(n)n}}_{=\begin{cases} 0 & \text{für } \sigma \neq id \\ 1 & \text{für } \sigma = id \end{cases}} = \operatorname{sign}(id) = 1.$$

Q.E.D.

6.7 Def. und Beispiele

1.) Wir hatten bisher in §6 stets $n \geq 2$ gesetzt. Es ist sinnvoll, die Determinante auch für $n=1$ einzuführen. Wir identifizieren $(a_{11}) \in M_1(K)$ mit $a_{11} \in K$ und definieren

$$\det : \underset{\| \; K}{M_1(K)} \longrightarrow K \quad \text{durch} \quad \det := id_K.$$

Dies ist offensichtlich die einzige Abbildung, die im Falle $n=1$ (D1) und (D3) erfüllt. (D2) ist im Fall $n=1$ sowieso erfüllt.

Ab sofort setzen wir nur noch $n \geq 1$ (statt $n \geq 2$) voraus.

2.) $n=2$:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \overset{6.6(*)}{=} \sum_{\sigma \in S_2} (\operatorname{sign}\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2}$$

$\in M_2(K)$

$S_2 = \{\mathrm{id}, \tau_{12}\}$

$\operatorname{sign}(\mathrm{id}) = 1$, $\operatorname{sign}(\tau_{12}) = -1$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

3.) $n=3$:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \overset{6.6(*)}{=} \sum_{\sigma \in S_3} (\operatorname{sign}\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2}\, a_{\sigma(3)3}$$

$\in M_3(K)$

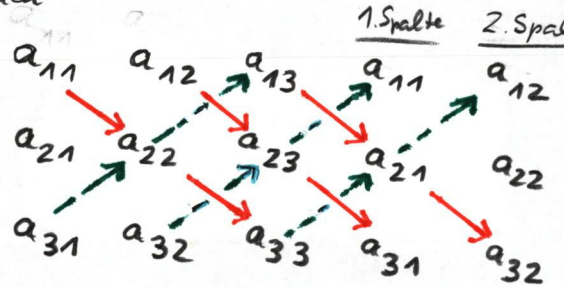
$S_3 \overset{6.5}{=} \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} \right\}$

$\operatorname{sign} = 1$ $\qquad$ $\operatorname{sign} = -1$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Zu merken nach Regel von Sarrus:



3 Produkte mit + Vorzeichen

3 Produkte mit – Vorzeichen

Beispiel

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 2\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot(-2)\cdot(-3) + 1\cdot 7\cdot 4 - (-3)\cdot 1\cdot 1 - 4\cdot(-2)\cdot 2 - 0\cdot 7\cdot 0$$

$$= 28 + 3 + 16 = 47$$

$$\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & -2 & 7 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & -3 & 4 \end{array}$$

21.1.03
(24.)

6.8 Satz

Für alle $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(K)$ $(n \geq 2)$ gilt:

$$\det(A^t) = \det(A)$$

$$\det(A^t) \overset{\text{6.6(*)}}{=} \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sign}\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}$$

$$\det(A) \overset{\text{6.6(*)}}{=} \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sign}\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n)n}$$

Beweis:

$$\sum_{\sigma\in S_n} \underbrace{(\operatorname{sign}\sigma)}_{\overset{6.4\ \text{Bem.}}{=} \operatorname{sign}\sigma^{-1}} \underbrace{a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{1\sigma(n)}}_{=\, w_1\cdot\ldots\cdot w_n,\ \sigma^{-1}\in S_n}$$

$$= w_{\sigma^{-1}(1)}\cdot\ldots\cdot w_{\sigma^{-1}(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

$$\begin{cases} w_i := a_{i\sigma(i)} \\ w_{\sigma^{-1}(i)} = a_{\sigma^{-1}(i)\,i} \\ \sigma\sigma^{-1}(i) = i \end{cases}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sign}\sigma^{-1})\, a_{\sigma^{-1}(1)1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

$$\overset{\uparrow}{=} \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sign}\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n)n}, \quad \text{q.e.d.}$$

$S_n \to S_n$, $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ ist bijektiv (zu sich selbst invers)

<u>Bemerkung</u> Identifiziert man $A \in M_n(K)$ mit dem n-Tupel $\begin{pmatrix} A_{1\cdot} \\ \vdots \\ A_{n\cdot} \end{pmatrix} \in \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{n}$ ihrer Zeilenvektoren, so gilt wegen des letzten Satzes analog zu 6.6:

$$\begin{aligned} \det : M_n(K) &\longrightarrow K \\ A &\longmapsto \det \begin{pmatrix} A_{1\cdot} \\ \vdots \\ A_{n\cdot} \end{pmatrix} \\ \| \\ \begin{pmatrix} A_{1\cdot} \\ \vdots \\ A_{n\cdot} \end{pmatrix} & \end{aligned}$$

ist auch „multilinear (in den Zeilenvektoren)" und „alternierend (in den Zeilenvektoren)".

$\boxed{6.9}$ <u>Satz</u> Für alle $A, B \in M_n(K)$ gilt

$$\boxed{\det(AB) = (\det A)(\det B)}$$ „<u>Determinanten-Multiplikationssatz</u>"

<u>Beweis</u>: Seien $C := AB$, $a = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$.

Dann folgt $\forall_{i,k \in \{1,\dots,n\}} \; c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$, also

$$\forall_{k \in \{1,\dots,n\}} \; C_{\cdot k} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} A_{\cdot j}$$

und daher

$$\begin{aligned} \det C &= \det(C_{\cdot 1}, \dots, C_{\cdot n}) \\ &= \det\Big(\sum_{\sigma_1=1}^{n} b_{\sigma_1 1} A_{\cdot \sigma_1}, \dots\dots, \sum_{\sigma_n=1}^{n} b_{\sigma_n n} A_{\cdot \sigma_n}\Big) \\ &\underset{(D1)}{=} \sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n) \in \{1,\dots,n\}^n} b_{\sigma_1 1} \cdot \ldots \cdot b_{\sigma_n n} \underbrace{\det(A_{\cdot \sigma_1}, \dots, A_{\cdot \sigma_n})}_{\underset{(D2)}{=} 0, \text{ falls } \#\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\} < n} \\ &\qquad \text{d.h. falls } (\sigma_1,\dots,\sigma_n) \text{ keine Permutation von } \{1,\dots,n\} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot b_{\sigma(n)n} \underbrace{\det(A_{\cdot \sigma(1)}, \dots, A_{\cdot \sigma(n)})}_{\underset{(\tilde{\tilde{D}}2)}{=} (\operatorname{sign} \sigma) \det(A_{\cdot 1}, \dots, \det A_{\cdot n})} \\ &= (\det A) \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sign} \sigma) b_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot b_{\sigma(n)n} \underset{\substack{6.6 \\ (*)}}{=} (\det A)(\det B), \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

2 **Warnung** $\det(A+B) \underset{\text{i.a.}}{\neq} (\det A)+(\det B)$, falls $n \geq 2$

(Beispiel: $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, also $A+B = E_n$

$\det A \underset{(D1)}{=} 0 \underset{(D1)}{=} \det B$, $\det(A+B) = \det E_n \underset{(D3)}{=} 1$)

6.10 Satz Für bel. $A, B \in M_n(K)$ und $\lambda \in K$ gilt:

(i) $\det B = \det A$, falls $i \in \{1,\dots,n\}$ und $\lambda_1, \dots, \hat{\lambda_i}, \dots, \lambda_n \in K$ existieren mit

$$B_{\cdot i} = A_{\cdot i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j A_{\cdot j} \quad \text{und} \quad \forall_{\substack{k \in \{1,\dots,n\} \\ k \neq i}} B_{\cdot k} = A_{\cdot k}$$

(oder mit

$$B_{i\cdot} = A_{i\cdot} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j A_{j\cdot} \quad \text{und} \quad \forall_{\substack{k \in \{1,\dots,n\} \\ k \neq i}} B_{k\cdot} = A_{k\cdot}\Big),$$

m.a.W.:

"Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn man von einer Spalte (bzw. Zeile) eine Linearkombination der übrigen Spalten (bzw. Zeilen) subtrahiert".

(ii) A ist invertierbar $\Rightarrow \det A \neq 0$ und $\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$

(iii) $\boxed{A \text{ ist invertierbar} \iff \det A \neq 0}$

oder äquivalent:

$\boxed{\text{Rang } A < n \iff \det A = 0}$

(iv) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

($\lambda A = (\lambda a_{ij})_{i,j}$, falls $A = (a_{ij})_{i,j}$)

Beweis: Zu (i) Für A, B wie angegeben folgt:

$$\det B = \det(B_{\cdot 1}, \dots, B_{\cdot n})$$

$$= \det\Big(A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot i-1}, A_{\cdot i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j A_{\cdot j}, A_{\cdot i+1}, \dots, A_{\cdot n}\Big)$$

$$\underset{(D1)}{=} \det(A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot n}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j \underbrace{\det(A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot i-1}, A_{\cdot j}, A_{\cdot i+1}, \dots, A_{\cdot n})}_{\underset{(D2)}{=} 0, \text{ da } j \in \{1, \dots, \hat{i}, \dots, n\}}$$

$$= \det A$$

Rest klar nach 6.8.

Zu (ii): Sei A invertierbar. Dann gilt $A \cdot \bar{A}^{-1} = E_n$, also nach 6.9:

$$(\det A)(\det \bar{A}^{-1}) = \det(A \bar{A}^{-1}) = \det E_n \underset{(D3)}{=} 1,$$

also folgt (ii).

Zu (iii): 1.) Sei A invertierbar, d.h. (nach 4.28): $\operatorname{Rang} A = n$

Dann gilt nach (ii): $\det A \neq 0$

2.) Sei A nicht invertierbar, d.h. (nach 4.28): $\operatorname{Rang} A < n$.

Dann sind die Spaltenvektoren $A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot n} \in K^n$ linear abhängig, also existieren $i \in \{1, \dots, n\}$ und $\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$A_{\cdot i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j A_{\cdot j}.$$

Nach (i) folgt daher

$$\det A = \det(A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot n})$$

$$\underset{(i)}{=} \det\Big(A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot i-1}, \underbrace{A_{\cdot i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j A_{\cdot j}}_{=0}, A_{\cdot i+1}, \dots, A_{\cdot n}\Big)$$

$$\underset{(D1)}{=} 0$$

Zu (iv): $\det(\lambda A) = \det(\lambda A_{\cdot 1}, \dots, \lambda A_{\cdot n}) \underset{(D1)}{=} \lambda^n \overbrace{\det(A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot n})}^{\det A}$

q.e.d.

$\boxed{6.11}$ Ist $A \in \boxed{GL(n,K) \underset{\substack{\uparrow \\ 6.10(iii)}}{=} \{A \in M_n(K) \mid \det A \neq 0\}}$ und $b \in K^n$,

so folgt für alle $x \in K^n$ offenbar

$$Ax = b \iff x = A^{-1}b,$$

$$b = A(A^{-1}b), \qquad x = A^{-1}(Ax)$$

$$\square\,\square = \square$$

also besitzt das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau eine Lösung x, nämlich $x = A^{-1}b$.

Der folgende Satz reduziert die Bestimmung der Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ auf die Berechnung von $(n+1)$ Determinanten.

$\boxed{\text{Satz}}$ (Cramersche Regel)

Seien $A \in GL(n,K)$ und $b \in K^n$. Dann gilt für die eindeutig bestimmte Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$:

$$\forall_{i \in \{1,\dots,n\}} \quad \boxed{x_i = \frac{\det(\overbrace{A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot i-1}, b, A_{\cdot i+1}, \dots, A_{\cdot n}}^{\text{diejenige Matrix} \in M_n(K)\text{, die aus } A \text{ dadurch erhalten wird, daß man die } i\text{-te Spalte } A_{\cdot i} \text{ durch } b \text{ ersetzt}})}{\det A}} \quad (*)$$

Beweis $Ax = b$ ist äquivalent zu $\sum_{j=1}^{n} x_j A_{\cdot j} = b$ (vgl. 5.1), also folgt

$$\det(A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot i-1}, \underbrace{b}_{= \sum_{j=1}^{n} x_j A_{\cdot j}}, A_{\cdot i+1}, \dots, A_{\cdot n})$$

$$\underset{(D1)}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{\det(\overset{1.}{A_{\cdot 1}}, \dots, A_{\cdot i-1}, \overset{i.}{A_{\cdot j}}, A_{\cdot i+1}, \dots, \overset{n.}{A_{\cdot n}})}_{\substack{= \det A \text{ für } i = j \\ \underset{(D2)}{=} 0 \text{ für } i \neq j}}$$

$$= x_i(\underbrace{\det A}_{\neq 0}), \qquad \text{q.e.d.}$$

Beispiel Lösung von

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 &= -4 \end{aligned}$$

mittels Cramerscher Regel:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\det \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{= \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -6-4 = -10 \neq 0$$

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

also

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{-3+8}{-10} = \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{-24-6}{-10} = \frac{-30}{-10} = 3.$$

⇑ oben benutzt

Bemerkung: Man schreibt für $\det \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$ oft zur Abkürzung: $\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$ (für $n \geq 2$)

$\boxed{6.12}$ **Satz** $\swarrow$ = Ü 56 (ii), (iii) (anderer Beweis von (iii) ohne Leibniz-Formel)

(i) $$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=:A\in M_n(K)\ (n\geq 2)} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(ii) $$\det_{(n)}\begin{pmatrix} B & D \\ \underbrace{0}_{\text{Nullmatrix}} & C \end{pmatrix} = (\det_{(r)} B)(\det_{(s)} C) = \det_{(n)}\begin{pmatrix} B & \overbrace{0}^{\text{Nullmatrix}} \\ \tilde{D} & C \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c|c|} & r & s \\ \hline r & B & D \\ \hline s & 0 & C \\ \hline \end{array}$$

$\overset{\mathbb{N}_+}{r} + \overset{\mathbb{N}_+}{s} = n$

$B\in M_r(K)$, $C\in M_s(K)$

$D\in M(r\times s, K)$, $\tilde{D}\in M(s\times r, K)$.

Beweis **Zu (i)** $\swarrow$ wie in Übgn Sei $a_{ij}=0$ für $i>j$. Dann folgt

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sign}\sigma)\, \underbrace{a_{\sigma(1)1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n)n}}_{=0,\ \text{falls } (\exists_{i\in\{1,\ldots,n\}}\ \sigma(i)>i)}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma\in S_n \text{ mit} \\ \underbrace{\forall_{i\in\{1,\ldots,n\}}\ \sigma(i)\leq i}_{\overset{\text{klar}}{\Leftrightarrow}\ \sigma = id}}} \cdots\cdots = \underbrace{(\operatorname{sign} id)}_{=1}\, a_{11}\cdot\ldots\cdot a_{nn}.$$

Rest klar wegen $\det A^t \underset{6.8}{=} \det A$.

Zu (ii)

Offenbar gilt: $$\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & E_s \end{pmatrix},$$

d.h. per def. ausführlich:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} & d_{11} & \cdots & d_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} & d_{r1} & \cdots & d_{rs} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{s1} & \cdots & c_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{s1} & \cdots & c_{ss} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} & d_{11} & \cdots & d_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} & d_{r1} & \cdots & d_{rs} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Daher nach 6.9:

$$\det_n \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \underbrace{\det_n \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}}_{= \det_s C \text{ (1) Beh.}} \cdot \underbrace{\det_n \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & E_s \end{pmatrix}}_{= \det_r B \text{ (2) Beh.}} = (\det_r B)(\det_s C)$$

Zu (1): $\widetilde{\det}_s : M_s(K) \to K$, $C \mapsto \det_n \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ (= $(C_{\cdot 1}, \dots, C_{\cdot s})$)

erfüllt offenbar (D1), (D2), (D3) für $\det_s$, also $\widetilde{\det}_s = \det_s$ (wegen der Eindeutigkeitsaussage in 6.6)

Zu (2): $\widetilde{\det}_r : M_r(K) \to K$, $B \mapsto \det_n \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & E_s \end{pmatrix}$ (= $(B_{\cdot 1}, \dots B_{\cdot r})$)

erfüllt offenbar (D1), (D2), (D3) für $\det_r$, also $\widetilde{\det}_r = \det_r$

Rest analog wegen $\det A^t = \det A$. q.e.d.

6.13 Def. (Die Kofaktorenmatrix $\tilde{A}$ von A und die zu A adjungierte Matrix A^{ad})

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(K)$ $(n \geq 2)$.

(i) Für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$ definieren wir

$$\boxed{X_{ij}(A) := \det(A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot j-1}, e_i^{(n)}, A_{\cdot j+1}, \dots, A_{\cdot n})} \qquad (1)$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i. \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\overset{\substack{6.10(i) \\ k.\text{Spalte} - a_{ik}(j.\text{Spalte}) \\ \text{für } k=1,\dots,\hat{j},\dots,n}}{=} \boxed{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i. \\ \\ \\ \end{matrix}} \qquad (2)$$

$$=: \boxed{A'_{ij}} \in M_n(K)$$

$$\overset{\substack{(\widetilde{D2}) \text{ und } 6.8 \\ (j-1) \text{ Vertauschungen} \\ \text{benachbarter Spalten,} \\ (i-1) \text{ Vertauschungen} \\ \text{benachbarter Zeilen}}}{=} \underbrace{(-1)^{j-1}(-1)^{i-1}}_{(-1)^{i+j}} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{6.12(ii) \\ (\text{oder } \ddot{U}\,5.6(iii))}}{=} \boxed{(-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} \qquad (3)$$

$$=: \boxed{A''_{ij}} \in M_{n-1}(K)$$

diejenige Matrix, die man aus A durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte erhält.

$\det(A'_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A''_{ij}) = X_{ij}(A) \in K$ heißt der Kofaktor von A zum Indexpaar (i,j),

$\tilde{A} := (X_{ij}(A))_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(K)$ heißt die Kofaktorenmatrix von A.

(ii) $A^{ad} := \tilde{A}^t \in M_n(K)$ heißt die zu A adjungierte Matrix.

$(A^{ad}_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \quad (X_{ji}(A))_{i,j=1,\dots,n}$

6.14 Satz Für jede Matrix $A \in M_n(K)$ $(n \geq 2)$ gilt

(i) $(A^{ad})^t = (A^t)^{ad}$,

(ii) $\boxed{A^{ad} A = A A^{ad} = (\det A) E_n}$

Beweis: Zu (i): Für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$ gilt offenbar $A'_{ij} = (A^t)'_{ji}$ $(M_n(K))$ (vgl. 6.13 (2)), also auch

$$\left((A^{ad})^t\right)_{ij} = (A^{ad})_{ji} \underset{6.13(ii)}{=} X_{ij}(A) \underset{6.13(2)}{=} \det(A'_{ij}) = \det((A^t)'_{ji})$$

$$\underset{6.13(2)}{=} X_{ji}(A^t) = \left((A^t)^{ad}\right)_{ij}$$

Zu (ii) 1.) Für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$ gilt:

$$(A^{ad} A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(A^{ad})_{ik}}_{= X_{ki}(A) \underset{6.13(1)}{=} \det(A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot i-1}, e_k^{(n)}, A_{\cdot i+1}, \dots, A_{\cdot n})} a_{kj}$$

$$\underset{(D1)}{=} \det(A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot i-1}, \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k^{(n)}}_{A_{\cdot j}}, A_{\cdot i+1}, \dots, A_{\cdot n})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} = \det A & \text{, falls } j = i \\ \underset{(D2)}{=} 0 & \text{, falls } j \neq i \end{array} \right\} = (\det A)\, \delta_{ij}$$

Damit ist $A^{ad} A = (\det A) E_n$ gezeigt.

2.) Aus 1.), angewandt auf A^t (anstelle von A) folgt

$$\underbrace{(A^t)^{ad}\, A^t}_{\substack{\shortparallel (i) \\ (A^{ad})^t A^t \\ \shortparallel \leftarrow 4.25(3) \\ (A\, A^{ad})^t}} = \underbrace{(\det A^t)}_{\underset{6.8}{=} \det A}\, \underbrace{E_n}_{= E_n^t} = ((\det A)\, E_n)^t ,$$

also gilt auch $A\, A^{ad} = (\det A)\, E_n$, q.e.d.

Die beiden folgenden Sätze sind einfache Folgerungen aus 6.14(ii):

$\boxed{6.15}$ <u>Satz</u> Für jede Matrix $A \in M_n(K)$ $(n \geq 2)$ gilt:

<u>(i)</u> $\forall_{j \in \{1,\dots,n\}}$ $\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, X_{kj}(A)}$

„<u>Entwicklung von $\det A$ nach den Elementen der j-ten Spalte</u>",

<u>(ii)</u> $\forall_{i \in \{1,\dots,n\}}$ $\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, X_{ik}(A)}$

„<u>Entwicklung von $\det A$ nach den Elementen der i-ten Zeile</u>".

<u>Beweis:</u> <u>Zu (i):</u> $\det A \underset{6.14(ii)}{=} (A^{ad} A)_{jj} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(A^{ad})_{jk}}_{\substack{\shortparallel \\ X_{kj}(A)}} a_{kj}$.

<u>Zu (ii):</u> $\det A \underset{6.14(ii)}{=} (A\, A^{ad})_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \underbrace{(A^{ad})_{ki}}_{\substack{\shortparallel \\ X_{ik}(A)}}$, q.e.d.

6.16

Beispiel

3. Spalte ↓

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}_{=\det(\ )} = 1 \cdot \underbrace{(-1)^{1+3}}_{=1} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \underbrace{(-1)^{3+3}}_{=1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

↑ Entwicklung nach 3. Spalte

$$= -8 + 1 + 2(2+4) = -8+1+12$$
$$= 5$$

6.16 Satz Für jede invertierbare Matrix $A \in M_n(K)$ gilt

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{ad}},$$

$A^{ad} = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

d.h. $\forall_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \; b_{ij} = \frac{1}{\det A} X_{ji}(A)$

(klar nach 6.14(ii))

Beispiel $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det A = ad - bc \neq 0$.

$$\left(X_{ij}(A)\right)_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(Whlg. von ü 52(ii))

6.17 (i) **Def.:** Sei V ein n-dim. K-Vektorraum.

$(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ heißt **(geordnete) Basis von V**, wenn
(runde Klammer!! (für n-Tupel))
$\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist.

Beispiel: $\mathcal{E}_n := (e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)})$ ist (geordnete) Basis von K^n, die sog. **kanonische geordnete Basis von K^n**

(ii) **Satz** Sei V ein n-dim. K-Vektorraum und sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine (geordnete) Basis von V. Dann ist

$$K_{\mathcal{A}} : V \longrightarrow K^n$$
$$v \longmapsto \boxed{v_{\mathcal{A}}} = K_{\mathcal{A}}(v)$$

(heißt „das Koordinaten-n-Tupel von v bzgl. $\mathcal{A}$")

$:=$ das eindeutig bestimmte $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$

ein K-Vektorraum-Isomorphismus mit Umkehrabbildung

$$K_{\mathcal{A}}^{-1} : K^n \longrightarrow V$$
$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

[Beweis: $K_{\mathcal{A}}$ ist offenbar K-linear und bijektiv, also ein K-Vektorraum-Isomorphismus. Rest klar.]

6.18 **Def.:** Seien V, W endlich-dim. K-Vektorräume, $f \in \operatorname{Hom}_{(K)}(V, W)$, $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine (geordnete) Basis von V und $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$ eine (geordnete) Basis von W.

Dann existiert offenbar genau eine Matrix

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in M(m \times n, K)$$

mit

$$\forall_{j\in\{1,\dots,n\}} \quad f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i' .$$

Wir schreiben $\boxed{M_{\mathcal{AB}}(f)}$ für A und nennen diese Matrix die Matrix von f bzgl. (der Basen) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Der j-te Spaltenvektor von $M_{\mathcal{AB}}(f)$ ist also gleich $f(v_j)_{\mathcal{B}}$ (vgl. 6.17(iii)), also

$$M_{\mathcal{AB}}(f) = \big(f(v_1)_{\mathcal{B}}, \dots, f(v_n)_{\mathcal{B}}\big)$$

($f(v_1)_{\mathcal{B}}, \dots, f(v_n)_{\mathcal{B}}$: Spaltenvektoren von $M_{\mathcal{AB}}(f)$)

Beispiel Sei $A \in M(m\times n, K)$, also $\Phi_A \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$. Dann gilt

$$M_{\mathcal{E}_n\mathcal{E}_m}(\Phi_A) = A .$$

(klar, vgl. 4.23).

6.19 Satz Seien V, W endlich-dim. K-Vektorräume, $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W. Dann ist

$$\Psi : \mathrm{Hom}_K(V,W) \longrightarrow M(m\times n, K) \overset{\text{Matrix wird mit } n\text{-Tupel der Spaltenvektoren identifiziert}}{=} \underbrace{K^m \times \dots \times K^m}_{n}$$

$$f \longmapsto M_{\mathcal{AB}}(f) = \big(f(v_1)_{\mathcal{B}}, \dots, f(v_n)_{\mathcal{B}}\big)$$

ein K-Vektorraum-Isomorphismus, insbesondere

$$\boxed{\dim_K \mathrm{Hom}_K(V,W) = n\,m = (\dim_K V)(\dim_K W)}$$

Beweis: 1.) Ψ ist linear, denn für alle $f, g \in \mathrm{Hom}(V,W)$ und alle $\lambda, \mu \in K$ gilt

$$M_{\mathcal{AB}}(\lambda f + \mu g) = \big(\overbrace{(\lambda f+\mu g)(v_1)_{\mathcal{B}}}^{\in K^m}, \dots, \overbrace{(\lambda f+\mu g)(v_n)_{\mathcal{B}}}^{\in K^m}\big)$$

$$= \big((\lambda f(v_1)+\mu g(v_1))_{\mathcal{B}}, \dots, (\lambda f(v_n)+\mu g(v_n))_{\mathcal{B}}\big)$$

$$= \big(\lambda f(v_1)_{\mathcal{B}} + \mu g(v_1)_{\mathcal{B}}, \dots, \lambda f(v_n)_{\mathcal{B}} + \mu g(v_n)_{\mathcal{B}}\big)$$

($W \to K^m$, $w \mapsto w_{\mathcal{B}}$ K-linear (nach 6.17(ii)))

$$= \lambda\big(f(v_1)_{\mathcal{B}}, \dots, f(v_n)_{\mathcal{B}}\big) + \mu\big(g(v_1)_{\mathcal{B}}, \dots, g(v_n)_{\mathcal{B}}\big)$$

$$= \lambda M_{\mathcal{AB}}(f) + \mu M_{\mathcal{AB}}(g)$$

2.) Ψ ist injektiv: Denn aus $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $\Psi(f) = 0$ folgt zunächst $f(v_j)_{\mathcal{B}} = 0$ und sodann nach 6.17(ii) auch $f(v_j) = 0$ für $j = 1, \dots, n$, also $f = 0$ nach 4.20(i).

3.) Ψ ist surjektiv: Sei $z = (z_1, \dots, z_n) \in \underbrace{K^m \times \dots \times K^m}_{n} = M(m \times n, K)$.

Nach 6.17(ii) existieren zunächst $y_1, \dots, y_n \in W$ mit $(y_i)_{\mathcal{B}} = z_i$ für $i = 1, \dots, n$. Nach 4.20(i) existiert genau ein $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ mit $f(v_i) = y_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt also

$$\Psi(f) = (f(v_1)_{\mathcal{B}}, \dots, f(v_n)_{\mathcal{B}}) = ((y_1)_{\mathcal{B}}, \dots, (y_n)_{\mathcal{B}})$$

$$= (z_1, \dots, z_n) = z.$$

Rest klar. q.e.d.

6.20 Satz Seien V_1, V_2, V_3 endlich-dim. K-Vektorräume, $f \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, $g \in \mathrm{Hom}(V_2, V_3)$ und sei $\mathcal{A}_i$ eine geordnete Basis von V_i für $i = 1, 2, 3$.

Dann gilt

$$\boxed{M_{\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_3}(g \circ f) = M_{\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3}(g) \cdot M_{\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2}(f)} \qquad (*)$$

(Matrizen-Produkt)

$=: C$ $\quad =: B$ $\quad =: A$

Beweis: Seien $\mathcal{A}_1 = (u_1, \dots, u_{n_1})$, $\mathcal{A}_2 = (v_1, \dots, v_{n_2})$, $\mathcal{A}_3 = (w_1, \dots, w_{n_3})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$. Dann folgt

$$\forall_{j \in \{1, \dots, n_1\}} \quad (g \circ f)(u_j) = g(f(u_j)) \overset{g \text{ linear}}{=} \sum_{k=1}^{n_2} a_{kj}\, g(v_k)$$

$$\| \qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\sum_{i=1}^{n_3} c_{ij} w_i \qquad \sum_{k=1}^{n_2} a_{kj} v_k \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n_3} b_{ik} w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n_3} \left(\sum_{k=1}^{n_2} b_{ik} a_{kj} \right) w_i ,$$

d.h.

$$\forall_{\substack{i \in \{1, \dots, n_3\} \\ j \in \{1, \dots, n_1\}}} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n_2} b_{ik} a_{kj} \quad , \quad \text{d.h.} \quad C = B A ,$$

q.e.d.

6.21 Satz Seien V, W zwei n-dim. K-Vektorräume, $f : V \to W$ ein K-Vektorraum-Isomorphismus, (also auch $f^{-1} : W \to V$ ein K-Vektorraum-Isomorphismus), $\mathcal{A}$ eine geordnete Basis von V und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von W. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(f) \in GL(n, K) \quad \text{und} \quad M_{\mathcal{B}\mathcal{A}}(f^{-1}) = M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(f)^{-1}.$$

Beweis: Aus $\vec{f}^{-1} \circ f = id_V$ folgt nach 6.20

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{A}}(\vec{f}^{-1}) \cdot M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(f) = \underbrace{M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(id_V)}_{\text{klar nach Def.}} = E_n$$

Hieraus folgt die Behauptung, q.e.d.

Nächster Thema: Dualraum, duale lineare Abbildung

6.22 (i) **Def.:** Sei V ein K-Vektorraum.

Der K-Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(V, K) = \{\varphi \mid \underbrace{\varphi : V \longrightarrow K \ K\text{-linear}}_{\text{d.h. per def.: } \varphi \text{ ist Linearform von } V}\}$

heißt auch **der Dualraum zu V** und man bezeichnet ihn auch mit $\boxed{V^*}$

(ii) **Satz** Sei V ein n-dim. K-Vektorraum und sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine (geordnete) Basis von V.

Dann existiert genau eine (geordnete) Basis $\mathcal{A}^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ von V^* mit

$$\underbrace{\forall_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \ \varphi_i(v_j) = \delta_{ij}}_{\text{d.h. genau (da } \varphi_i \text{ } K\text{-linear):}}$$

$$\forall_{i \in \{1,\dots,n\}} \ \forall_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K} \ \varphi_i\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) = \lambda_i \,, \qquad (*)$$

insbes. $\dim V^* = n = \dim V$.

$\mathcal{A}^*$ heißt **die zu $\mathcal{A}$ duale Basis von V^***

Es gilt

$$\forall_{\varphi \in V^*} \ \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i)\, \varphi_i \qquad (**)$$

[Beweis: Für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ sei $\varphi_i : V \to K$ durch (*) definiert, also offenbar $\varphi_i \in V^*$. Nach 4.6 bleibt zu zeigen:

Es existieren eindeutig bestimmte $\mu_1,\dots,\mu_n \in K$ mit $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varphi_i$.

Dies folgt aber sofort daraus, daß für alle $\mu_1,\dots,\mu_n \in K$:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varphi_i \underset{4.20}{\iff} \forall_{j \in \{1,\dots,n\}} \varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \underbrace{\varphi_i(v_j)}_{\delta_{ij}} = \mu_j ,$$

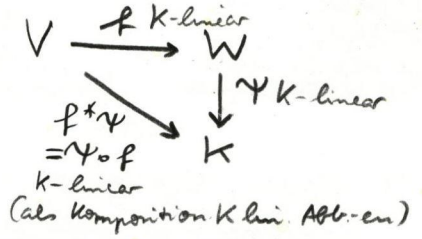
Damit ist auch (**) gezeigt, q.e.d.]

6.23 Satz

(i) Sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen.

Dann ist auch die Abbildung

$$f^* : W^* \longrightarrow V^*$$
$$\psi \longmapsto \boxed{\psi \circ f =: f^*(\psi)}$$

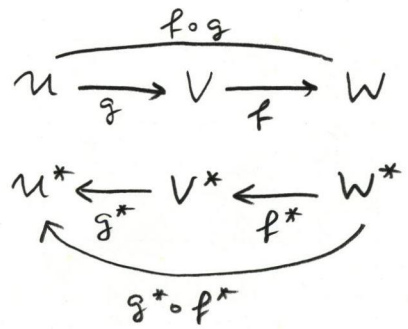


K-linear.

$f^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ heißt die zu $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ duale Abbildung.

(ii) Sind $g : U \to V$ und $f : V \to W$ K-lineare Abbildungen zwischen K-Vektorräumen, so gilt

$$\boxed{(f \circ g)^* = g^* \circ f^*}$$



Beweis: Zu (i): Für alle $\psi_1, \psi_2 \in W^*$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ gilt

$$f^*(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) = (\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) \circ f = \lambda_1(\psi_1 \circ f) + \lambda_2(\psi_2 \circ f)$$
$$= \lambda_1 f^*(\psi_1) + \lambda_2 f^*(\psi_2).$$

Zu (ii): Für alle $\Psi \in W^*$ gilt:

$$(f \circ g)^*(\Psi) = \Psi \circ (f \circ g) = \underbrace{(\Psi \circ f)}_{f^*(\Psi) \in V^*} \circ g = g^*(f^*(\Psi))$$

$$= (g^* \circ f^*)(\Psi) \quad , \quad \text{q.e.d.}$$

31.1.03
(27.)

6.24 Satz Sei $f: V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen endlich-dim. K-Vektorräumen, (also auch $f^*: W^* \to V^*$ K-lineare Abbildung nach 6.23). Ferner sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ bzw. $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von V bzw. W und $\mathcal{A}^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ bzw. $\mathcal{B}^* = (\Psi_1, \dots, \Psi_m)$ sei die zu $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ duale Basis von V^* bzw. W^*.

Dann gilt

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}^*\mathcal{A}^*}(f^*)}_{=: B \in M(n \times m, K)} = \underbrace{M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(f)^t}_{=: A \in M(m \times m, K)} .$$

Beweis: Sei $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Dann folgt

$\forall_{\substack{i \in \{1,\dots,m\} \\ j \in \{1,\dots,m\}}}$

$$\underbrace{\left(\underbrace{f^*(\Psi_j)}_{\in V^*}\right)(v_i)}_{\text{II Def. } B} \underset{\text{Def. } f^*}{=} (\Psi_j \circ f)(v_i) = \Psi_j\left(\underbrace{f(v_i)}_{\text{II Def. } A}\right)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj} \varphi_k\right)(v_i) \qquad \Psi_j\left(\sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell i} w_\ell\right)$$

$$\text{II} \qquad \text{II } \Psi_j \text{ linear}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_{kj} \underbrace{\varphi_k(v_i)}_{\delta_{ki}} \qquad \sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell i} \underbrace{\Psi_j(w_\ell)}_{\delta_{j\ell}}$$

$$\text{II} \qquad \text{II}$$

$$b_{ij} \qquad a_{ji}$$

q.e.d.

6.25 Satz Sei V ein K-Vektorraum, $V^* := \mathrm{Hom}(V,K)$, $V^{**} := (V^*)^* = \mathrm{Hom}(V^*,K)$. Dann gilt:

(i) Es existiert eine kanonische

K-lineare Abbildung $\Phi : V \longrightarrow V^{**}$, $v \mapsto \Phi_v$

mit

$$\forall_{v\in V}\ \forall_{\varphi\in V^*}\ \Phi_v(\varphi) = \varphi(v). \qquad (*)$$

(ii) Im Falle $\dim V \in \mathbb{N}$ ist $\Phi: V \to V^{**}$ ein K-Vektorraum-Isomorphismus.

Beweis: Zu (i): 1.) Für jedes $v\in V$ gilt $\widetilde{\Phi}_v \in V^{**} = \mathrm{Hom}(V^*,K)$ (wie in $(*)$),

denn $\forall_{\varphi,\tilde\varphi\in V^*,\ \lambda,\tilde\lambda\in K}\ \Phi_v(\lambda\varphi+\tilde\lambda\tilde\varphi) \underset{(*)}{=} (\lambda\varphi+\tilde\lambda\tilde\varphi)(v) = \lambda\varphi(v)+\tilde\lambda\tilde\varphi(v)$

$\underset{(*)}{=} \lambda\Phi_v(\varphi)+\tilde\lambda\Phi_v(\tilde\varphi)$.

2.) $\Phi: V\to V^{**}$ ist K-linear, d.h. es gilt

$$\forall_{v,\tilde v\in V,\ \lambda,\tilde\lambda\in K}\ \Phi_{\lambda v+\tilde\lambda\tilde v} = \lambda\Phi_v+\tilde\lambda\Phi_{\tilde v},$$

denn $\forall_{\varphi\in V^*}\ \Phi_{\lambda v+\tilde\lambda\tilde v}(\varphi) \underset{(*)}{=} \varphi(\lambda v+\tilde\lambda\tilde v) \underset{\varphi\text{ linear}}{=} \lambda\varphi(v)+\tilde\lambda\varphi(\tilde v)$

$\underset{(*)}{=} \lambda\Phi_v(\varphi)+\tilde\lambda\Phi_{\tilde v}(\varphi) = (\lambda\Phi_v+\tilde\lambda\Phi_{\tilde v})(\varphi)$.

Zu (ii) O.B.d.A. sei $n := \dim V \in \mathbb{N}_+$. (Der Fall $n=0$ ist trivial).
Nach 6.22(ii) folgt dann zunächst $\dim V^* = n$ und sodann $\dim \underbrace{V^{**}}_{(V^*)^*} = n$. Da Φ nach (i) linear ist, genügt es zum Nachweis von (ii) zu zeigen, daß $\ker\Phi = \{0\}$.
Beweis hiervon: Sei $v\in\ker\Phi$. Dann gilt $\varphi(v) = \underbrace{\widetilde{\Phi}_v}_{=0}(\varphi) = 0$ für alle $\varphi\in V^*$. Dies ist nur möglich im Fall $v=0$:
Denn aus $v\neq 0$ folgt die Existenz einer Basis

$\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ von V mit $v_1 = v$, also folgt, wenn $\mathcal{A}^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ die dazu duale Basis von V^* ist:

$\varphi_1 \in V^*$ und $\varphi_1(v) = \varphi_1(v_1) = 1$ q.e.d.

6.26 Satz (Determinante und Spur eines Endomorphismus eines endl.-dim. Vektorraums)

Für jeden endlich-dim. K-Vektorraum V existieren eindeutig bestimmte Abbildungen

$$\det: \mathrm{End}(V) \to K, \quad f \mapsto \det(f) \quad \text{„Determinante von } f\text{"}$$

und

$$\mathrm{Spur}: \mathrm{End}(V) \to K, \quad f \mapsto \mathrm{Spur}(f) \quad \text{„Spur von } f\text{"}$$

mit

$$\forall_{\mathcal{A} \text{ geordnete Basis von } V} \ \forall_{f \in \mathrm{End}(V)} \quad \det(f) = \det M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(f), \quad \mathrm{Spur}(f) = \mathrm{Spur}\, M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(f)$$

Bemerkung: Die Beh. ist offenbar gleichbedeutend mit

$$\forall_{\mathcal{A}, \mathcal{B} \text{ geordnete Basen von } V} \ \forall_{f \in \mathrm{End}(V)} \quad \det M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(f) = \det M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) \quad (1)$$

und

$$\mathrm{Spur}\, M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(f) = \mathrm{Spur}\, M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) \quad (2)$$

Beweis: Wir haben nur (1) und (2) zu zeigen.

Seien also $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei bel. geordnete Basen von V und $f \in \mathrm{End}(V)$. Wir setzen zur Abkürzung

$$A := M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(f), \quad B := M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) \in M_n(K), \text{ falls } n = \dim V.$$

Wir setzen $C := M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$ (C heißt die „Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$")

Dann gilt nach 6.21 wegen $\mathrm{id}_V^{-1} = \mathrm{id}_V$:

$$C^{-1} = M_{\mathcal{B}\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V).$$

Wir behaupten:

$$B = C\,A\,C^{-1} \qquad (3)$$

[Zu (3): $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) \underset{\substack{6.20\\ id_V \circ f = f}}{=} M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(id_V)\, \underbrace{M_{\mathcal{B}\mathcal{A}}(f)}_{\text{II } 6.20,\ f \circ id_V = f}$

$M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(f)\, M_{\mathcal{B}\mathcal{A}}(id_V)$,

also gilt (3).]

Aus (3) folgt

$$\det B = (\det C)(\det A)\underbrace{(\det C^{-1})}_{\frac{1}{\det C}} = \det A$$

und

$$\text{Spur } B = \text{Spur}\big(\underbrace{(C\,A)}_{\curvearrowright}\underbrace{C^{-1}}_{\curvearrowleft}\big) \underset{\substack{\text{Übung}\\ 5.9(ii)}}{=} \text{Spur}\big(\underbrace{C^{-1}(C\,A)}_{A}\big),$$

womit (1) und (2) gezeigt sind, q.e.d.

6.27 Satz Sei V ein n-dim. K-Vektorraum und seien $f, g \in \text{End}(V)$ und $\lambda \in K$. Dann gilt:

(i) $\det(id_V) = 1$,

(ii) $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$,

(iii) f invertierbar d.h. $f \in \text{Aut}(K)$ $\Rightarrow \det(f) \neq 0$ und $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$,

(iv) f invertierbar (d.h. genau f injektiv, d.h. genau: f surjektiv, vgl. 4.22) $\Longleftrightarrow \det(f) \neq 0$,

(v) $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$,

(vi) $f^* \in \text{End}(V^*)$ und $\det(f^*) = \det(f)$.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ eine geordnete Basis von V und $\mathcal{A}^*$ die dazu duale geordnete Basis von V^*.

Zu (i): $\det(id_V) \underset{6.26}{=} \det \underbrace{M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(id_V)}_{=E_n} = \det E_n = 1$.

Zu (ii): $\det(f \circ g) = \det \underbrace{M_{AA}(f \circ g)}_{\overset{6.20}{=} M_{AA}(f) M_{AA}(g)} = \det M_{AA}(f) \det M_{AA}(g)$

$= \det(f) \det(g)$.

Zu (iii): Sei f invertierbar, also $\bar{f}^{-1} \in \mathrm{End}(V)$ und $\bar{f}^{-1} \circ f = id_V$.

Dann folgt

$$1 \underset{(i)}{=} \det(id_V) \underset{(ii)}{=} \det(\bar{f}^{-1}) \det(f)$$

also ist (iii) klar.

Zu (iv): „$\Rightarrow$" ist bereits klar nach (iii):

„$\Leftarrow$": Gelte also $\det(f) = \det M_{AA}(f) \neq 0$, also $M_{AA}(f)^{-1} \in M_n(K)$.

Nach 6.19 existiert genau ein $g \in \mathrm{End}(V)$ mit

$$M_{AA}(g) = M_{AA}(f)^{-1}.$$

Dann folgt

$$M_{AA}(g \circ f) \underset{6.20}{=} M_{AA}(g) \cdot M_{AA}(f) = E_n = M_{AA}(id_V)$$

$$M_{AA}(f \circ g) \underset{6.20}{=} M_{AA}(f) \; M_{AA}(g) = E_n = M_{AA}(id_V),$$

also wiederum nach 6.19:

$$g \circ f = id_V \quad \text{und} \quad f \circ g = id_V,$$

also f invertierbar (und $g = \bar{f}^{-1}$).

Zu (v): $\det(\lambda f) = \det \underbrace{M_{AA}(\lambda f)}_{= \lambda M_{AA}(f)} \overset{6.10\,(iv)}{=} \lambda^n \det M_{AA}(f) = \lambda^n \det(f)$

Zu (vi): $\det(f^*) = \det \underbrace{M_{A^*A^*}(f^*)}_{\overset{6.24}{=} M_{AA}(f)^t} \overset{6.8}{=} \det M_{AA}(f) = \det(f)$,

q.e.d.

§ 7 Eigenwerte

7.1 Def.: Sei V ein K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$.

(i) $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert von f**

$$:\Leftrightarrow \exists_{v \in V \setminus \{0\}} \quad f(v) = \lambda v$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f - \lambda \mathrm{id}_V}_{\in \mathrm{End}(V)} \text{ nicht injektiv}$$

$$\underset{\text{falls } \dim V < \infty}{\overset{6.27(iv)}{\Leftrightarrow}} \det(f - \lambda \mathrm{id}_V) = 0 .$$

(ii) Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, so heißt jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ mit $f(v) = \lambda v$ ein **Eigenvektor von f zum Eigenwert λ** und wir führen folgende Bezeichnung ein:

$$\boxed{\mathrm{Eig}_\lambda(f)} := \mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{id}) = \{ v \in V \mid \underbrace{f(v) = \lambda v}_{\text{d.h. } v = 0 \text{ oder } v \text{ Eigenvektor von } f \text{ zum Eigenwert } \lambda} \}$$

↑ „Eigenraum von f zum Eigenwert λ"

Beispiele: 1) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$

$$\forall_{\lambda \in \mathbb{R}} \quad \det(f - \lambda \mathrm{id}) = \det\left(\underbrace{M_{\varepsilon_2 \varepsilon_2}(f - \lambda \mathrm{id})}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 1 = 0$$

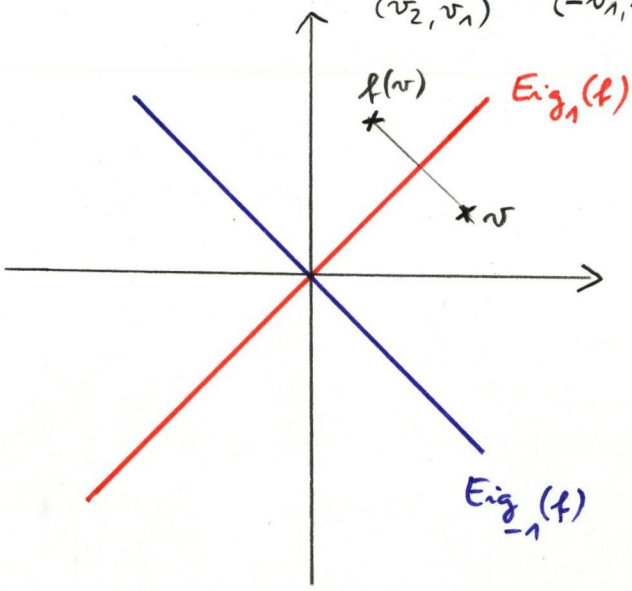
$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ oder } \lambda = -1$$

Also: $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ alle Eigenwerte von f.

Wir bestimmen $\mathrm{Eig}_1(f)$ und $\mathrm{Eig}_{-1}(f)$:

$\forall_{v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2}$ $\quad v \in Eig_1(f) \Leftrightarrow f(v) = v \Leftrightarrow (v_2,v_1) = (v_1,v_2) \Leftrightarrow v_1 = v_2 \Leftrightarrow v \in \mathbb{R}(1,1)$

$v \in Eig_{-1}(f) \Leftrightarrow f(v) = -v \Leftrightarrow (v_2,v_1) = (-v_1,-v_2) \Leftrightarrow v_1 = -v_2 \Leftrightarrow v \in \mathbb{R}(1,-1)$



f = Orthogonalspiegelung an der Geraden $x = y$

4.2.03
(28.)

2.) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) := (-x_2,x_1)$
$f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$

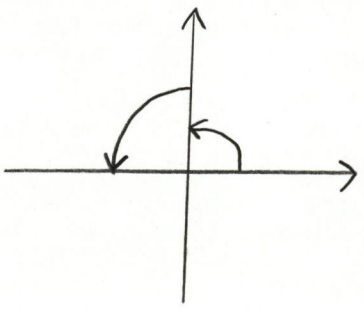
$\forall_{\lambda\in\mathbb{R}}$ $\det(f-\lambda id) = \det(M_{\varepsilon_2\varepsilon_2}(f-\lambda id))$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 + 1 \geq 0 \quad (\text{da } \lambda \in \mathbb{R})$$

Also: f besitzt keinen Eigenwert

f ist Drehung um 90° „links-herum", $f(1,0) = (0,1)$, $f(0,1) = (-1,0)$



3.) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$, $f(z_1, z_2) = (-z_2, z_1)$

$f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$

$$\forall_{\lambda \in \mathbb{C}} \quad \det(f - \lambda \mathrm{id}) = \det\left(M_{\varepsilon_2 \varepsilon_2}(f - \lambda \mathrm{id})\right) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

(genauer $\varepsilon_2^{\mathbb{C}}$, vorher $\varepsilon_2^{\mathbb{R}}$)

$$= \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \underset{\parallel}{i} \quad \text{oder} \quad \lambda = -i$$

$(0,1)$

Also $\lambda_1 = i (\in \mathbb{C})$ und $\lambda_2 = -i (\in \mathbb{C})$ alle Eigenwerte von $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$

$$\forall_{w = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2} \quad w \in \mathrm{Eig}_i(f) \Leftrightarrow f(w) = iw \Leftrightarrow w_1 = iw_2$$

$$\underset{\parallel}{(-w_2, w_1)} \qquad \underset{\parallel}{(iw_1, iw_2)}$$

$$\Leftrightarrow w \in \mathbb{C}(i, 1)$$

$$w \in \mathrm{Eig}_{-i}(f) \Leftrightarrow f(w) = -iw \Leftrightarrow w_1 = -iw_2$$

$$\underset{\parallel}{(-w_2, w_1)} \qquad \underset{\parallel}{(-iw_1, -iw_2)}$$

$$\Leftrightarrow w \in \mathbb{C}(-i, 1)$$

Wir werden zeigen:

Ist V ein endl.-dim. $\mathbb{C}$-Vektorraum, so besitzt jeder Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dies wird aus dem jetzt zu behandelnden „Fundamentalsatz der Algebra" folgen.

7.2 (Der wohl einfachste Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra)

Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion (= ganz-rationale Funktion) vom Grade $n \geq 1$, d.h.

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \qquad (*)$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$.

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Jede Polynomfunktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vom Grade ≥ 1 besitzt eine Nullstelle.

Beweis (nach Argand 1814)

Es gelte (*). Wir werden zeigen:

(1) $|f|: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |f(z)|$ besitzt ein Minimum,

d.h. es existiert $c_0 \in \mathbb{C}$ mit $\forall_{z \in \mathbb{C}} \; |f(z)| \geq |f(c_0)|$.

(2) Zu jedem $c \in \mathbb{C}$ mit $\underbrace{f(c) \neq 0}_{\text{d.h. } |f(c)| > 0}$ existiert ein $\tilde{c} \in \mathbb{C}$ mit $|f(\tilde{c})| < |f(c)|$.

Aus (1), (2) folgt der Fundamentalsatz der Algebra sehr einfach wie folgt: Angenommen f besitzt keine Nullstelle. Dann gilt also für $c_0 \in \mathbb{C}$ wie in (1): $|f(c_0)| > 0$ und es existiert kein $\tilde{c} \in \mathbb{C}$ mit $|f(\tilde{c})| < |f(c_0)|$ im Widerspruch zu (2) im Falle $c := c_0$.

Zu zeigen bleiben also lediglich (1) und (2).

Beweis von (1): Da für $z \in \mathbb{C} - \{0\}$:

$$\frac{|f(z)| - |f(0)|}{|z|^n} \underset{(*)}{=} \left| \frac{f(z)}{z^n} \right| - \frac{|f(0)|}{|z|^n} = \underbrace{\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right|}_{\xrightarrow{|z| \to \infty} |a_n| > 0} - \underbrace{\frac{|f(0)|}{|z|^n}}_{\xrightarrow{|z| \to \infty} 0}$$

existiert $r \in \mathbb{R}_+$ derart, daß gilt mit $D_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$:
kompakte Kreisscheibe vom Radius r um 0 in $\mathbb{C}$

$$\forall_{z \in \mathbb{C} - D_r} \; |f(z)| > |f(0)| \qquad (3)$$

Nach Analysis I-Vorlesung ist f als Polynomfunktion stetig, also ist wegen der Stetigkeit von $|\,|: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ auch $|f| = |\,| \circ f$ stetig. Nach dem Satz vom Maximum (vgl. Analysis-Vorlesung[1]) s.u. besitzt die stetige Funktion $|f|\,|D_r : D_r \to \mathbb{R}$ auf der kompakten Teilmenge D_r von $\mathbb{C}$ ein Minimum, d.h. es existiert $z_0 \in D_r$ mit

$$\forall_{z \in D_r} \; |f(z)| \geq |f(z_0)|, \quad \text{insbes. } |f(0)| \geq |f(z_0)| \qquad (4)$$

Aus (3), (4) folgt

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \; |f(z)| \geq |f(z_0)|,$$

womit (1) gezeigt ist.

Wir bereiten den Beweis von (2) durch ein Lemma vor.

Lemma (von Argand)

Sei $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion mit $g(0) \neq 0$ und seien $k \in \mathbb{N}_+$ und $a \in \mathbb{C} - \{0\}$.
Dann existiert $d \in \mathbb{C}$ mit

$$|a + d^k g(d)| < |a|$$

[**Beweis des Lemmas**: Als Polynomfunktion ist g stetig (s.o.). Wegen der Stetigkeit von g in 0 existiert zu $(\varepsilon := \frac{1}{2}|g(0)| \in \mathbb{R}_+$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{\substack{z \\ |z| < \delta}} \; |g(z) - g(0)| < \tfrac{1}{2}|g(0)| \qquad (5)$$

---

1) In der Analysis I-Vorlesung (Geiges) wurde der Satz vom Maximum/Minimum als Satz über Fktn $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ formuliert. Der dortige Beweis ist auch ein Beweis für den entsprechenden Satz über Fktn $f: K \to \mathbb{R}$, wobei $K \subset \mathbb{C}$ kompakte Teilmenge.

Dann folgt:

$$\forall_{\substack{z \\ |z|<\delta}} \quad |a + z^k g(z)| \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} |a + z^k g(0)| + |z^k (g(z) - g(0))|$$
$$\underset{(5)}{\leq} |a + z^k g(0)| + \tfrac{1}{2}|z|^k \, |g(0)| \,. \qquad (6)$$

Wähle $t \in \mathbb{R}$ mit

$$0 < t < 1 \quad \text{und} \quad t < \underbrace{\delta^k \left| \frac{g(0)}{a} \right|}_{\in \mathbb{R}_+} \,. \qquad (7)$$

Dann existiert $d \in \mathbb{C}$ mit

$$|d| < \delta \quad \text{und} \quad d^k = -t \frac{a}{g(0)} \,. \qquad (8)$$

(Zu (8): Sei $w := -t \frac{a}{g(0)} \in \mathbb{C}^*$. Dann folgt

$$|w| = \underbrace{|t|}_{(7)\,=\,t} \underbrace{\left| \frac{a}{g(0)} \right|}_{>0} \underset{(7)}{<} \delta^k \left| \frac{g(0)}{a} \right| \left| \frac{a}{g(0)} \right| = \delta^k \,. \qquad (9)$$

Nach Anal. I-Vorl. existiert $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\frac{w}{|w|} = e^{i\varphi}$. Dann folgt für $d := \sqrt[k]{|w|}\, e^{i\frac{\varphi}{k}} \in \mathbb{C}$ offenbar $|d| = \sqrt[k]{|w|} \underset{(9)}{<} \sqrt[k]{\delta^k} = \delta$ und $d^k \overset{2)}{=} |w| e^{i\varphi} = w = -t \frac{a}{g(0)}$, womit (8) gezeigt ist.)

Aus (6), (8) folgt:

$$|a + d^k g(d)| \leq \underbrace{|a + d^k g(0)|}_{\overset{(8)}{=} -ta} + \underbrace{\tfrac{1}{2}|d|^k \, |g(0)|}_{\underset{(8)}{=}}$$

$$|a + d^k g(0)| = |(1-t)a| \underset{(7)}{=} (1-t)|a|$$

$$\tfrac{1}{2}|d|^k \, |g(0)| = \tfrac{1}{2}|ta| \underset{(7)}{=} \tfrac{1}{2} t |a|$$

$$= (1 - t + \tfrac{t}{2})|a| = \underbrace{(1 - \tfrac{t}{2})}_{\underset{(7)}{<} 1} \underbrace{|a|}_{>0} < |a|$$

Damit ist das Lemma bewiesen]

---

2) Beachte, daß $\left(e^{i\frac{\varphi}{k}}\right)^k = e^{i\varphi}$ auf Grund des Additionstheorems der komplexen Exponentialfunktion $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, vgl. Anal. I-Vorlesung.

Beweis von (2): Sei also $c \in \mathbb{C}$ mit $f(c) \neq 0$. Mit $f(z)$ ist offenbar auch

$$h(z) := \overbrace{f(z+c)}^{(*)= a_n (z+c)^n + \dots + a_1 (z+c) + a_0} - f(c) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine Polynomfunktion vom Grade $n \geq 1$ und es gilt $h(0) = 0$. Daher existieren eindeutig bestimmte $k \in \{1, \dots, n\}$ und $b_n, b_{n-1}, \dots, b_{k+1}, b_k \in \mathbb{C}$ mit $b_k \neq 0$ und

$$\left.\begin{aligned} f(z+c) - f(c) = h(z) &= b_n z^n + \dots + b_{k+1} z^{k+1} + b_k z^k \\ &= z^k \underbrace{\left(b_n z^{n-k} + \dots + b_{k+1} z + b_k \right)}_{=: g(z)} \end{aligned}\right\} (10)$$

$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist eine Polynomfunktion mit $g(0) = b_k \neq 0$. Nach dem Lemma existiert daher zu $(a := f(c) \in \mathbb{C} - \{0\})$ ein $d \in \mathbb{C}$ mit

$$\underbrace{|f(c) + d^k g(d)|}_{\overset{\parallel (10)}{|f(d+c)|}} < |f(c)|$$

Mit $\tilde{c} := d + c \in \mathbb{C}$ gilt daher $|f(\tilde{c})| < |f(c)|$, also ist (2) gezeigt, Q.E.D.

7.2.03 (29.)

Bemerkung (für Kenner der Funktionentheorie):

Das Lemma von Argand ist eine triviale Folge des „Satzes von der Gebietsinvarianz", der besagt:

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend) und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so ist auch $f(G) \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

(Wähle $f(z) := \underbrace{a + z^k g(z)}_{\text{ist Polynomfunktion vom Grade} \geq k \geq 1,} : \mathbb{C} \overset{=G}{\longrightarrow} \mathbb{C}$)

insbes. holomorph und nicht konstant, hat Wert $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ an der Stelle $z = 0$.

Offenbar folgt (2) auch direkt aus dem Satz von der Gebietsinvarianz.

Wir benötigen noch weitere Resultate über Polynome und Polynomfunktionen.

7.3 Whg (vgl. 3.8, 4.2, Ü 33 und Ü 42).

Sei K ein beliebiger Körper, ((auch im folgenden stets vorausgesetzt))

(i) Ein Polynom $f \in K[t]$ war definiert worden als eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in K mit $f_k = 0$ für alle k bis auf höchstens endlich viele.

Im Falle $f \neq 0$ (Nullfolge) hatten wir $\partial(f) := \max\{k \in \mathbb{N} \mid f_k \neq 0\} \in \mathbb{N}$ den Grad von f genannt.

$K[t]$ ist ein unitärer kommutativer Ring und auch ein K-Vektorraum.

Für $f \in K[t]$ schreiben wir

$$f = \sum_{k=0}^{n} f_k t^k \quad , \text{ falls } f_k = 0 \text{ für } k > n \qquad (*)$$

Die Multiplikation in $K[t]$ war so erklärt, wie sie durch die Schreibweise in $(*)$ und das Distributivgesetz nahegelegt wird, nämlich

$$t^r \cdot t^s := t^{r+s}$$

(vgl. 3.8).

(ii) Jedem Polynom $f \in K[t]$ wie in $(*)$ war die zugehörige Polynomfunktion (= ganz-rationale Funktion) $F(f) =: F_f$ zugeordnet worden:

$$F_f : K \longrightarrow K, \quad x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} f_k x^k$$

Die Abbildung

$$K[t] \longrightarrow K^K, \quad f \longmapsto F_f$$

ist ein Ring-Homomorphismus und eine K-lineare Abbildung.

(iii) Zu $f, g \in K[t]$ mit $g \neq 0$ existieren eindeutig bestimmte $h, r \in K[t]$ mit

$$f = g\,h + r, \qquad \text{wobei } r = 0 \text{ oder } (r \neq 0 \text{ und } \partial(r) < \partial(g)).$$

7.4 Def. Sei $f \in K[t]$ und sei $\lambda \in K$

λ heißt Nullstelle von f $:\Leftrightarrow F_f(\lambda) = 0$,
(d.h. λ ist Nullstelle von $F_f : K \to K$)

Beispiele 1) Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[t] \setminus \{0\}$ mit $\partial(f) \geq 1$ besitzt eine Nullstelle (Klar nach Fundamentalsatz der Algebra 7.2, wonach $F_f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Nullstelle besitzt)

Dies bedeutet per def., daß der Körper $\mathbb{C}$ „algebraisch abgeschlossen" ist.

2.) $t^2 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$ besitzt keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$,

$t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]$ " " " in $\mathbb{R}$,

$t^2 + t + 1 \in \mathbb{Z}_2[t]$ " " " in $\mathbb{Z}_2$,

(letzteres, da für $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ gilt: $0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0$, $1^2 + 1 + 1 = 1 \neq 0$)

7.5 Satz Sei $f \in K[t] \setminus \{0\}$ und sei $\lambda \in K$ eine Nullstelle von f, (d.h. per def. $F_f(\lambda) = 0$).
Dann existiert $h \in K[t] \setminus \{0\}$ mit

$$f = \underbrace{(t-\lambda)}_{\in K[t]\setminus\{0\} \text{ mit } \partial(t-\lambda)=1}\, h \quad \text{und} \quad \partial(h) = \partial(f) - 1.$$

Beweis: Nach 7.3 (iii) existieren $h, r \in K[t]$ mit

$$f = (t-\lambda)\,h + r,$$

wobei $r = 0$ oder $r \neq 0$ und $\underbrace{\partial(r) < \partial(t-\lambda) = 1}_{\text{d.h. } \partial(r) = 0}$

d.h. r konstant $= r_0 \in K$

Nach Vor. gilt $F_f(\lambda) = 0$, also folgt

$$0 = F_f(\lambda) \underset{7.3(ii)}{=} \underbrace{F_{t-\lambda}(\lambda)}_{=\lambda-\lambda=0} F_h(\lambda) + \underbrace{F_r(\lambda)}_{=r_0} = r_0 ,$$

also

$$\underbrace{f}_{\neq 0 \text{ Vor.}} = (t-\lambda)\, h \quad \text{und} \quad h \neq 0$$

Schließlich folgt hieraus $\partial(f) \underset{\text{Ü 42 (i)}}{=} \underbrace{\partial(t-\lambda)}_{=1} + \partial(h)$, q.e.d.

7.6 Satz Sei $f \in K[t] \setminus \{0\}$ und sei $n := \partial(f) \in \mathbb{N}$.
Dann hat f höchstens n (verschiedene) Nullstellen

Beweis: Vollständige Induktion über $n := \partial(f) \in \mathbb{N}$.

$n = 0$: Dann ist f konstant und $\neq 0$, also hat f überhaupt keine Nullstelle , da auch $F_f : K \to K$ konstant und $\neq 0$ ist

Schluß von $n-1 \in \mathbb{N}$ auf n : Angenommen $n-1 \in \mathbb{N}$, d.h. $n \in \mathbb{N}_+$, und die Beh. gelte für $n-1$. Sei dann $f \in K[t] \setminus \{0\}$ mit $\partial(f) = n$.

1. Fall: f hat keine Nullstelle. Dann ist die Anzahl der Nullstellen von f $= 0 < n$.

2. Fall: f hat eine Nullstelle $\lambda_1 \in K$. Dann gilt nach 7.5 :

$$f = (t-\lambda)\, h \quad \text{mit} \quad h \in K[t] \setminus \{0\} , \quad \partial(h) = \partial(f) - 1 = n-1 .$$

Nach Ind.-Var. hat h nur höchstens $(n-1)$ Nullstellen

Nach 7.3(ii) gilt :

$$F_f = \underbrace{F_{t-\lambda}}_{\substack{\text{hat } \lambda \text{ als} \\ \text{einzige} \\ \text{Nullstelle}}} \cdot \underbrace{F_h}_{\substack{\text{hat höchstens} \\ (n-1) \text{ Nullstellen}}} ,$$

also hat F_f höchstens n Nullstellen , d.h. f hat höchstens n Nullstellen. (Beachte , daß K als Körper

„nullteilerfrei" ist, d.h. per def., daß

$$\forall_{y,z \in K} \left(yz = 0 \Rightarrow y = 0 \vee z = 0 \right). \Big)$$

7.7 Bemerkung

(i) Die Abbildung

$$K[t] \longrightarrow K^K$$
$$f \longmapsto F_f$$

ist im Falle $\#K = \infty$ (d.h. K hat unendlich viele Elemente) stets injektiv.

[Beweis: Da $f \mapsto F_f$ K-linear ist, genügt es zu zeigen, daß der Kern dieser Abbildung Null ist.
Sei also $f \in K[t]$ mit $F_f = 0$ (Nullelement des K-VR's K^K = konstante Abb. $K \to K$ vom Wert 0)

Dann ist jedes $\lambda \in K$ Nullstelle von f, also hat f wegen $\#K = \infty$ unendlich viele Nullstellen. Dies ist nach 7.6 nur im Falle $f = 0 \in K[t]$ möglich, q.e.d.]

Auf Grund dieses Resultats wird im Falle $\#K = \infty$ ($z.B.$ $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) oft zwischen den Polynomen $f \in K[t]$ und den korrespondierenden Polynomfunktionen $F_f : K \to K$ nicht unterschieden, man spricht oft einfach von „Polynomen". Insbesondere kann man für jede Polynomfunktion $F_f : K \to K$ den Grad von F_f definieren als den Grad $\partial(f)$ von f, (was wir bereits mehrfach getan haben).

(iii) Im Falle $\#K < \infty$ hatten wir bereits in ü 33 (iii) gesehen, daß die Abbildung $K[t] \longrightarrow K^K$, $f \mapsto F_f$, niemals injektiv ist.

Eine andere Begründung hierfür (als in ü 33 (iii)):

Für jeden Körper K sind $1, t, t^2, t^3, \ldots$ abzählbar viele verschiedene Elemente von $K[t]$, während es im Falle $n := \#K \in \mathbb{N}_+$ nur n^n verschiedene Elemente von K^K gibt.

Beispiel: $K = \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$.

Es gibt nur 4 Abbildungen $\mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, nämlich

$$\underbrace{F_0}_{\substack{0\mapsto 0\\ 1\mapsto 0}}, \quad \underbrace{F_1}_{\substack{0\mapsto 1\\ 1\mapsto 1}}, \quad \underbrace{F_t}_{\substack{0\mapsto 0\\ 1\mapsto 1}} \text{ und } \underbrace{F_{t+1}}_{\substack{0\mapsto 1\\ 1\mapsto 0}}$$

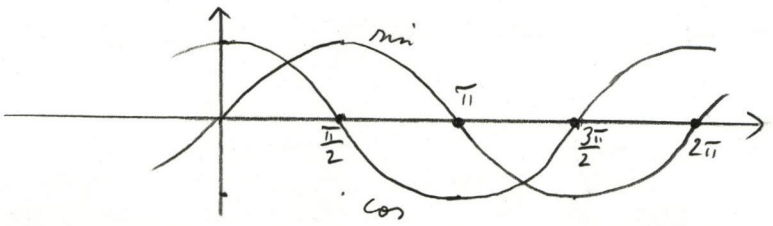
11.2.03 (30.) Besprechung von Klausuraufgaben (Aufgaben Nr. 2, 3, 6 und 10).

14.2.03
(31., letzte)

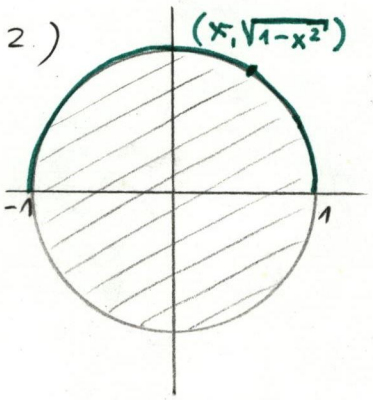
Zum Semesterabschluß Interessantes über die „Kreiszahl"

$\pi \approx 3{,}1415926535\ldots$

7.8 1.) Die Zahl $\pi \in \mathbb{R}$ ist definiert als das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle von $\cos x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vgl. Anal.)



2.)

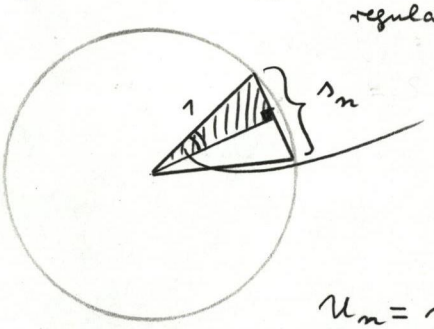


Die Fläche der Einheitskreisscheibe ist gleich

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \pi$$

↑ Substitutionsregel und Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (vgl. Anal.)

3.) $s_n :=$ Seite des dem Einheitskreis einbeschriebenem regulären n-Ecks ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$)



$$\sphericalangle = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$$

$$\frac{s_n}{2} = \sin\frac{\pi}{n}$$

$U_n = n\,s_n =$ Umfang dieses n-Ecks

$$\text{Umfang des Einheitskreises} = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{n\,2\sin\frac{\pi}{n}}_{2\pi\,\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}}$$

$$= 2\pi \underbrace{\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}}_{=1} = 2\pi$$

↑ nach de L'Hospital wegen $\sin 0 = 0$, $\frac{\cos x}{1} \xrightarrow[x\to 0+]{} \frac{1}{1} = 1$

Satz π ist irrational (erstmals bewiesen von Lambert (1767))

d.h. noch kürzer: $\pi \notin \mathbb{Q}$

Beweis (nach I. Niven (1947)):

Angenommen π ist rational. Dann existieren (wegen $\pi > 0$)

$$\tau, \sigma \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } \pi = \frac{\tau}{\sigma} \quad (1)$$

Weiter existiert

$$n \in \mathbb{N} \text{ mit } \frac{(\pi\tau)^n}{n!} < \frac{1}{\pi} \quad (2)$$

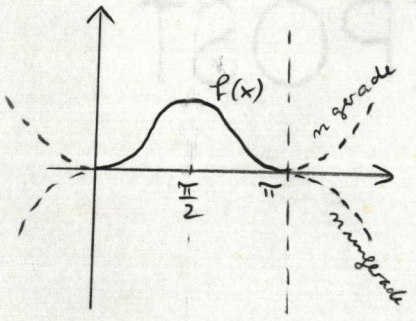
[Denn $\left(\frac{(\pi\tau)^k}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge als Gliederfolge der Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pi\tau)^k}{k!}$, die gegen $\exp(\pi\tau) \in \mathbb{R}$ konvergiert.]

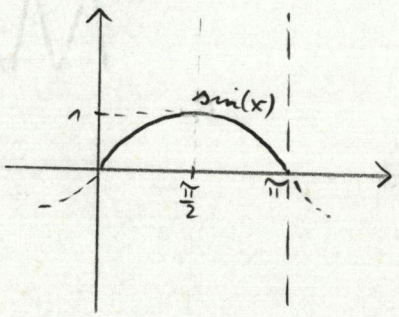
Wir definieren

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \frac{x^n(\tau - \sigma x)^n}{n!} \underset{\text{(klar)}}{=} \frac{x^n \sigma^n \left(\frac{\tau}{\sigma} - x\right)^n}{n!} \overset{(1)}{=} \underbrace{\frac{\sigma^n}{n!}}_{>0} \underbrace{x^n (\pi - x)^n}_{\substack{(-1)^n(x-\pi)^n \\ (-1)^n x^{2n} + \otimes x^{2n-1} + \ldots + \otimes x^n}}, \quad (3)$$

also f ganz-rationale Fkt. mit $(\partial(f) =) \operatorname{Grad}(f) = 2n$.





Wir wollen zeigen:

$$\int_0^{\pi} \overbrace{f(x)\sin(x)\,dx}^{[0,\pi] \to \mathbb{R} \text{ stetig, also Riemann-integrierbar}} \text{ ist eine ganze Zahl } > 0 \text{ und } < 1, \quad (*)$$

womit dann ein Widerspruch hergeleitet ist.

Zum Beweis von (*):

1.) Aus (3) folgt:

$$f(x)\,|\,[0,\pi] \text{ ist stetig und } \geq 0\,, \quad f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) > 0\,,$$

also gilt auch

$$f(x)\sin(x)\,|\,[0,\pi] \text{ ist stetig und } \geq 0\,, \quad f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{=1} > 0\,,$$

weshalb nach Analysis I (Geizes) (Übungsblatt 14, Aufgabe 2):

$$\boxed{\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx > 0} \quad (*1)$$

2.) $\forall_{t\in[0,\pi]}$ $\underbrace{f(t)}_{\geq 0\ (3)}\ \underbrace{\sin(t)}_{\leq 1\ \text{Anal. I}} \leq f(t) \underset{\text{nach (3)}}{\leq} \frac{s^n}{n!}\pi^n \underbrace{\left(\frac{\pi^n}{s^n}\right)}_{=(1)} = \frac{(\pi r)^n}{n!}\,,$

folglich wegen der Monotonie des Riemann-Integral (vgl. Anal I)
(↖ d.h. aus $g \leq h$ folgt $S_g \leq S_h$)

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx \leq \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{(\pi r)^n}{n!}}_{\text{konstant}}\,dx \underset{\text{An. I}}{=} \frac{(\pi r)^n}{n!}\,\pi \underset{(2)}{\leq} 1\,,$$

also

$$\boxed{\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx < 1} \quad (*2)$$

3.) Wir definieren die ganz-rationale Fkt.

$$\left.\begin{aligned} &g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{durch} \\ &g(x) := \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(2k)}(x)}_{f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - + \ldots + (-1)^n f^{(2n)}(x)}\,. \end{aligned}\right\} (4)$$

Dann folgt:

$$\Big(g'(x)\sin(x) - g(x)\cos(x)\Big)'$$

$$= g''(x)\sin(x) + g'(x)\cos(x) - g'(x)\cos(x) + g(x)\sin(x)$$

$\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$

$$= \Big(g''(x) + g(x)\Big)\sin(x)$$

$$\underset{(4)}{=} \Bigg(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \overbrace{(-1)^k}^{-(-1)^{k+1}} \overbrace{f^{(2k+2)}(x)}}_{-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k f^{(2k)}(x)} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}(x)\Bigg)\sin(x)$$

$$= \Big(f(x) - (-1)^{n+1}\underbrace{f^{(2n+2)}(x)}_{=0,\ \text{da } f \text{ ganz-rational und Grad}(f) = 2n \overset{(3)}{}}\Big)\sin(x)$$

$$= f(x)\sin(x)\,,$$

also nach Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung:

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx = \Big(g'(x)\sin(x) - g(x)\cos(x)\Big)\Big|_0^{\pi}$$

$$= g(\pi) + g(0)$$

$\sin(\pi) = \sin(0) = 0$,
$\cos(\pi) = -1$, $\cos(0) = 1$

$$\underset{(4)}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big(f^{(2k)}(\pi) + f^{(2k)}(0)\Big)\,.$$

Zum Nachweis von

$$\boxed{\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx \in \mathbb{Z}} \qquad (*3)$$

genügt es daher zu zeigen, daß

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} \quad f^{(2k)}(0),\ f^{(2k)}(\pi) \in \mathbb{Z}\,. \qquad (5)$$

Zu (5): Aus (3) folgt einerseits

$$f(x) = f(\pi - x) ,$$

also auch (durch einfache vollständige Induktion):

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \quad f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(\pi - x) ,$$

insbes.

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \quad f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(\pi) . \qquad (6)$$

Andererseits folgt aus (3) und dem Binomischen Satz (vgl. Anal. I-Vor.)

$$(\pi - x)^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} \pi^{n-k} (-1)^k}_{\in \mathbb{Z}} x^k$$

$$\exists_{a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n} \in \mathbb{Z}} \quad f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots + a_{2n} x^{2n}}{n!} ,$$

also folgt z.B. nach dem Taylorschen Satz (vgl. Anal. I)

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \quad f^{(k)}(0) = \begin{cases} k! \, \frac{a_k}{n!} = \underbrace{\frac{k!}{n!}}_{\in \mathbb{N}} \underbrace{a_k}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z} & \text{für } k \in \{n, n+1, \ldots, 2n\} \\ 0 \quad \text{sonst} . \end{cases}$$

$$\in \mathbb{Z} . \qquad (7)$$

Aus (7) und (6) folgt (5).

Schließlich gilt (*) wegen (*1), (*2) und (*3), q.e.d.

Bemerkungen: 1.) Die Irrationalität von π besagt:

$$\forall_{a_0, a_1 \in \mathbb{Z}} \quad \left(a_0 + a_1 \pi = 0 \implies a_0 = a_1 = 0 \right) ,$$

d.h. genau: Keine von der Nullfkt. verschiedene ganz-rationale Fkt. vom Grade ≤ 1 mit ganzzahligen Koeff.-en besitzt π als Nullstelle.

Allgemeiner läßt sich zeigen (nicht in dieser Vorlesung!):

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_+} \; \forall_{a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}} \; \left(a_0 + a_1 \pi + a_2 \pi^2 + \ldots + a_n \pi^n = 0 \Rightarrow a_i = 0 \text{ für } i = 0, \ldots, n \right),$$

d.h. genau: Keine von der Nullfkt. verschiedene ganz-rationale Fkt. mit ganzzahligen Koeffizienten besitzt π als Nullstelle,

d.h. per def.

$\boxed{\pi \text{ ist transzendent}}$.

Dies ist der Satz von Lindemann (1882).

2.) Ebenso wie π ist auch die Zahl e nicht nur irrational (sehr leicht, vgl. Anal. I-Vorl.), sondern auch transzendent (nach Satz von Hermite (1873)).

Ende Lin. Alg. I

22.4.03 (1.)

Lineare Algebra II (SS 03)

schließt an 7.7 an (7.8 war Einschub, Beweis von $\pi \notin \mathbb{Q}$).

7.9 Def.: (Charakteristisches Polynom und charakteristische Funktion von $A \in M_n(K)$).

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(K)$.

(i) Wir definieren $P_A \in K[t]$, das sog. charakteristische Polynom von A, durch

$$P_A := \det \begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-t \end{pmatrix} = \det\left(a_{ij} - \delta_{ij} t\right)_{i,j=1,\dots,n}$$

$(n \times n)$-Matrix mit Koeffizienten in $K[t]$, deshalb Determinante zunächst nicht definiert, da $K[t]$ kein Körper.

In den Übungen (ü 74) wird gezeigt werden, daß ein Körper $K(t) \supset K[t]$ existiert, der $K[t]$ als Unterring enthält, (der sog. „Quotientenkörper von $K[t]$", auch „Körper der rationalen Funktionen in einer Unbestimmten mit Koeffizienten aus K" genannt). Dann kann man $(a_{ij} - \delta_{ij} t)_{ij}$ als Element von $M_n(K(t))$ auffassen und $\det(\ )$ ist wohldefiniert.

$$\overset{\text{G.6 (*)}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sign} \sigma)\left(a_{\sigma(1)1} - \delta_{\sigma(1)1} t\right) \cdot \dots \cdot \left(a_{\sigma(n)n} - \delta_{\sigma(n)n} t\right)$$

P_A ist offenbar ein Polynom $\underbrace{a_n}_{\neq 0} t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ vom Grad n mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in K$ und es gilt

$$a_n = (-1)^n, \quad a_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{Spur} A, \quad a_0 = \det A .$$

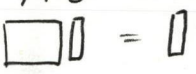
(ii) Die dem Polynom $P_A \in K[t]$ zugeordnete Polynomfunktion (ganz-rationale Funktion) $\boxed{\tilde{P}_A} := F_{P_A} : K \to K$ (i. S. von 7.3(iii)) heißt die charakteristische Funktion von A, also

$$\forall_{x \in K} \quad \tilde{P}_A(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \det \underbrace{(A - x E_n)}_{\in M_n(K)} \in K .$$

7.10 Def.: Seien $A \in M_n(K)$ und $\lambda \in K$.

(i) λ heißt Eigenwert von A $:\Leftrightarrow$ λ ist Eigenwert von $\Phi_A \in \operatorname{End}(K^n)$,

$$\overset{\text{d.h.}}{\underset{(\text{vgl. } 7.1(i))}{\Leftrightarrow}} \exists_{v \in K^n - \{0\}} \; \underbrace{\Phi_A(v)}_{Av} = \lambda v$$



$$\Leftrightarrow \exists_{v \in K^n - \{0\}} \; (A - \lambda E_n) v = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\det (A - \lambda E_n)}_{\overset{7.9(iii)}{=} \tilde{P}_A(\lambda) = F_{P_A}(\lambda)} = 0 , \quad \text{d.h. } \lambda \text{ ist Nullstelle von } \tilde{P}_A : K \to K$$

$$\overset{\text{Def. } 7.4}{\Leftrightarrow} \lambda \text{ ist Nullstelle von } P_A \in K[t].$$

(ii) Ist λ Eigenwert von A, so heißt

$$\boxed{\operatorname{Eig}_\lambda(A)} := \operatorname{Eig}_\lambda(\Phi_A) \overset{7.1(ii)}{=} \{ v \in K^n \mid \underbrace{Av}_{\Phi_A(v)} = \lambda v \}$$

$$= \operatorname{Kern}(A - \lambda E_n)$$

der Eigenraum von A zum Eigenwert λ

7.11 Beispiele

1.) Jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 1)$ besitzt einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$.

[Denn $\tilde{P}_A = (-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ besitzt nach dem Fundamentalsatz der Algebra eine Nullstelle.]

2.) Im Falle n ungerade besitzt jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$.

Im Falle n gerade existieren Matrizen $B \in M_n(\mathbb{R})$ ohne Eigenwert in $\mathbb{R}$.

[Denn $\tilde{P}_A = (-1)^n X^n + \dots + a_1 X + a_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat im Falle n ungerade die Eigenschaften

$$\lim_{x \to +\infty} \tilde{P}_A(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} \tilde{P}_A(x) = +\infty,$$

und besitzt folglich nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen aus Analysis I eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Im Falle n gerade, $n = 2m$, hat die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) = M_{2m}(\mathbb{R})$$

keinen Eigenwert, denn

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad \tilde{P}_B(x) = (x^2+1)^m \geq 1 \quad]$$

3.) $K = \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$, (also $\forall_{x\in\mathbb{Z}_2}\ x^2 = x$, $x = -x$; $\forall_{g\in\mathbb{Z}_2[t]}\ g = -g$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_2)$$

$$P_A = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-t & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = (-t)\,t^2(1-t) - 1 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix}}_{1+t}$$

$P_A \in \mathbb{Z}_2[t]$ ist Polynom vom Grade 4

(Entwickl. 1. Zeile)

$$= t^4 - t^3 - t - 1$$

$$= t^4 + t^3 + t + 1$$

25.4.03 (2)

$$= (t-1)^2 \underbrace{(t^2+t+1)}_{\text{ohne Nullstelle}}$$, also 1 einziger Eigenwert von A.

Rechnung hierzu:

1 ist NS wegen $1+1+1+1 = 0$

$(t^4 + t^3 + t + 1) : (t-1) = t^3 + 1$

$t^4 - t^3$

$0 + t + 1$

$t - 1$

0

1 ist NS von t^3+1 wegen $1+1=0$

$(t^3+1) : (t-1) = t^2 + t + 1$

$t^3 - t^2$

$t^2 + 1$

$t^2 - t$

$t + 1$

$t - 1$

0

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{Z}_2^4} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ c \\ a+c+d \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underset{((a+d=0))}{a=b=c=d} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also: $\mathrm{Eig}_1(A) = \mathbb{Z}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1-dim. UnterVR von $\mathbb{Z}_2^4$

$\tilde{P}_A : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$, $\forall_{x\in\mathbb{Z}_2}\ \tilde{P}_A(x) = \underbrace{x^4 + x^3}_{=0} + x + 1 = x + 1$

7.12 Satz

Seien V ein n-dim. K-Vektorraum, $f \in End(V)$, $\mathcal{A}$ eine geordnete Basis von V und $\lambda \in K$. Dann gilt:

λ ist Eigenwert von $f \iff \lambda$ ist Eigenwert von $\underbrace{M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(f) \in M_n(K)}_{=: M_{\mathcal{A}}(f)}$ ← heißt die Matrix von $f \in End(V)$ bzgl. $\mathcal{A}$

Beweis:

$$\text{e.S.} \underset{\text{Def 7.1(i)}}{\iff} \underbrace{\det(f - \lambda id_V)}_{\text{II 6.26}} = 0$$

$$\det(M_{\mathcal{A}}(f - \lambda id_V))$$

$$\text{II 6.19}$$

$$\det(M_{\mathcal{A}}(f) - \lambda \underbrace{M_{\mathcal{A}}(id_V)}_{= E_n})$$

$$\underset{\text{Def. 7.10(i)}}{\iff} \text{r. S.}$$

7.13 Def. Seien $A, B \in M_n(K)$

A, B heißen ähnlich $:\iff \exists_{C \in GL(n,K) \subset M_n(K)} \; B = C A C^{-1}$

7.14 Satz

Seien $A, B \in M_n(K)$ ähnliche Matrizen.
Dann stimmen die charakteristischen Polynome $P_A, P_B \in K[t]$ überein, also stimmen auch die charakteristischen Funktionen $\tilde{P}_A, \tilde{P}_B : K \to K$ überein und A und B haben dieselben Eigenwerte.

Beweis: Aus der Vor. folgt die Existenz eines $C \in GL(n,K)$ mit $B = C A C^{-1}$. Dann folgt:

$\forall_{x \in K}$ $\tilde{P}_B(x) = \det(\underbrace{B - x E_n}_{C(A - x E_n)\bar{C}^{-1}})$

$= \det(C)\,\det(A - x E_n)\,\underbrace{\det(\bar{C}^{-1})}_{1/\det(C)}$

$= \det(A - x E_n)$

$= \tilde{P}_A(x)$,

d.h. $\tilde{P}_B = \tilde{P}_A$, insbes. $\tilde{\tilde{P}}_B^{-1}(\{0\}) = \tilde{\tilde{P}}_A^{-1}(\{0\})$.

Menge aller EW-e von B — Menge aller EW-e von A

Damit sind die 2. Aussage und die 3. Aussage gezeigt. Zur 1. Aussage:

Im Falle $\#K = \infty$ folgt aus $\tilde{P}_B = \tilde{P}_A$ ($= F_{P_B} = F_{P_A}$) nach 7.7 (i), daß

auch $P_B = P_A$.

Zu zeigen bleibt $P_B = P_A$ im Falle $\#K < \infty$.

Beweis hierzu unter Benutzung des Körpers $K(t) \supset K[t]$,

(vgl. 7.9 (i) und Ü 74):

Aus $B = C A \bar{C}^{-1}$ folgt auch, falls $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$:

$\underbrace{A}_{\in M_n(K(t))} - \underbrace{t}_{\in K(t)} \underbrace{E_n}_{\in M_n(K(t))} = (\underbrace{a_{ij} - \delta_{ij} t}_{\in K(t)})_{ij} \in M_n(K(t))$,

↑ skalare Mult. in $M_n(K(t))$

$B - t E_n = (b_{ij} - \delta_{ij} t)_{ij} \in M_n(K(t))$,

$B - t E_n = \underbrace{C}_{\in GL(n, K(t)) \subset M_n(K(t))} (A - t E_n) \bar{C}^{-1}$,

also $P_B = \det(B - t E_n) = \det(C)\,\det(A - t E_n)\,\det(\bar{C}^{-1})$

$= \det(A - t E_n) = P_A$, q.e.d.

Auf Grund von 7.14 können wir definieren:

7.15 Def. Sei V ein n-dim. K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$.

Wir definieren dann das charakteristische Polynom $P_f \in K[t]$ (hat Grad n) von f und die charakteristische Funktion $\tilde{P}_f : K \to K$ von f durch

$$\boxed{P_f} := P_A \quad \text{und} \quad \boxed{\tilde{P}_f} := \tilde{P}_A ,$$

wobei $A := M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(f) = M_{\mathcal{A}}(f)$ für eine beliebige geordnete Basis $\mathcal{A}$ von V.

[Zur Wohldefiniertheit von P_f und $\tilde{P}_f$:
Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei geordnete Basen von V und $A := M_{\mathcal{A}}(f)$, $B := M_{\mathcal{B}}(f)$, so gilt nach 6.26(3):

$$B = C A C^{-1}$$

mit $C := M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) \in GL(n, K)$, also sind A und B ähnlich, weshalb nach 7.14 $P_A = P_B$ und $\tilde{P}_A = \tilde{P}_B$.]

Unser Thema im folgenden ist das sog. „Normalformenproblem":

Gegeben $f \in \mathrm{End}(V)$, wobei V ein n-dim. K-Vektorraum. Finde eine geordnete Basis $\mathcal{A}$ von V derart, daß $M_{\mathcal{A}}(f) \in M_n(K)$ „möglichst einfache" Gestalt hat,

oder äquivalent:

Gegeben $A \in M_n(K)$. Finde eine „möglichst einfache" Matrix $B \in M_n(K)$, die zu A ähnlich ist.

7.16 Satz („Geometr. Vielfachheit ≤ algebr. Vielfachheit bei EW-en")

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$, wobei V ein n-dim. K-Vektorraum (bzw. $A \in M_n(K)$) und sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f (bzw. A).

Man nennt

$$\mu(P_f, \lambda) := \max\{k \in \mathbb{N}_+ \mid \exists_{h \in K[t]} \; P_f = \underbrace{(-1)^k(\lambda - t)^k}_{=(t-\lambda)^k} h\} \in \{1, \dots, n\}$$

(bzw. $\mu(P_A, \lambda)$) (bzw. P_A)

(= die Vielfachheit der Nullstelle λ von P_f (bzw. P_A))

die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ von f (bzw. A)

und

$$\dim \mathrm{Eig}_\lambda(f) \in \{1, \dots, n\}$$

(bzw. $\dim \mathrm{Eig}_\lambda(A)$)

die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ von f (bzw. A)

Dann gilt stets

$$\dim \mathrm{Eig}_\lambda(f) \leq \mu(P_f, \lambda) \quad (\text{bzw. } \dim \mathrm{Eig}_\lambda(A) \leq \mu(P_A, \lambda)).$$

$$\dim \mathrm{Eig}_\lambda(f) = r, \qquad \mu(P_f, \lambda) = s$$

Beweis: Sei $(v_1, \dots, v_r)$ eine geordnete Basis von $\mathrm{Eig}_\lambda(f)$ $(\subset V)$ und sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Ergänzung zu einer geordneten Basis von V. Dann hat $M_{\mathcal{A}}(f)$ die Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{matrix} & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \begin{matrix} \} r \\ \} n-r \end{matrix}$$

mit einer Matrix $B \in M_{n-r}(K)$, falls $r < n$.

Im Falle $r = n$ gilt $P_f = (\lambda - t)^n$, also $r = s = n$,

und im Falle $r < n$ gilt offenbar

$$P_f \overset{\text{Def. 7.15}}{=} P_A = (\lambda - t)^r P_B, \text{ also } r \leq s, \quad \text{q.e.d.}$$

7.17 Satz Sei V ein n-dim K-Vektorraum und $f \in End(V)$. $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ seien r voneinander verschiedene Eigenwerte von f ($r \in \mathbb{N}_+$) und es sei $v_j \in Eig_{\lambda_j}(f) \setminus \{0\}$ für $j = 1, \dots, r$. Dann folgt: $v_1, \dots, v_r$ sind linear unabhängig.

Beweis: Vollständige Induktion über $r \in \mathbb{N}_+$:

Für $r = 1$ ist die Beh. klar.

Sei $r \in \mathbb{N}_+$, $r \geq 2$, und die Beh. gelte für $r-1$. Ferner seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ und $v_1, \dots, v_r$ wie im Satz. Seien weiter $\mu_1, \dots, \mu_r \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i v_i = 0 . \qquad (1)$$

Dann folgt

$$0 = f(0) \underset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{r} \mu_i \underbrace{f(v_i)}_{\lambda_i v_i} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_i v_i , \qquad (2)$$

also

$$0 \underset{(2),(1)}{=} \sum_{i=1}^{r} \underbrace{(\lambda_i - \lambda_r)}_{\substack{=0 \\ \text{für } i = r}} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{\overbrace{r-1}} (\lambda_i - \lambda_r) \mu_i v_i \qquad (3)$$

Nach Ind.-Vor. sind $v_1, \dots, v_{r-1}$ lin. unabhängig, also folgt aus (3)

$$\forall_{i \in \{1, \dots, r-1\}} \ \underbrace{(\lambda_i - \lambda_r)}_{\neq 0} \mu_i = 0 , \text{ d.h. } \mu_i = 0 . \qquad (4)$$

Schließlich folgt aus (4) und (1): $\mu_r \underbrace{v_r}_{\neq 0} = 0$, also gilt auch

$$\mu_r = 0 . \qquad (5)$$

Wegen (4), (5) ist die lineare Unabh. von $v_1, \dots, v_r$ gezeigt, q.e.d.

Korollar: Seien V ein n-dim K-Vektorraum und $f \in End(V)$ und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ alle voneinander verschiedenen Eigenwerte von f, wobei $k \in \mathbb{N}_+$. Sei

$$W := Eig_{\lambda_1}(f) + \ldots + Eig_{\lambda_k}(f),$$

definiert als die Summe aller Eigenräume von f, also W Untervektorraum von V.

Dann folgt: W ist „direkte Summe" der Eigenräume

$$W = Eig_{\lambda_1}(f) \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_k}(f), \qquad (*)$$

d.h. per def. (wie in Ü 34 dort $k=2$):

Jedes Element $w \in W$ läßt sich auf genau eine Weise schreiben als Summe $w = w_1 + \ldots + w_k$ mit $w_i \in Eig_{\lambda_i}(f)$ für $i = 1, \ldots, k$,

d.h. genau:

$0 \in W$ läßt sich nur in trivialer Weise (alle $w_i = 0$) als eine solche Summe schreiben.

[Beweis: Gelte $0 = w_1 + \ldots + w_k$ mit $w_i \in Eig_{\lambda_i}(f)$ für $i = 1, \ldots, k$. Dann sind alle $w_i = 0$, denn andernfalls wäre 0 nichttriviale Linearkombination von endlich vielen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenvektoren im Widerspruch zum letzten Satz.]

7.18 Def. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$, wobei V ein n-dim. K-Vektorraum

f heißt <u>diagonalisierbar</u> $:\Longleftrightarrow$ Es existiert eine geordnete Basis $\mathcal{A}$ von V derart daß

$M_{\mathcal{A}}(f)$ eine <u>Diagonalmatrix</u> ist

d.h. außerhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen

$$M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$ Es existiert eine Basis von V, bestehend aus Eigenvektoren von f

Entsprechende Definition für $A \in M_n(K)$:

A heißt <u>diagonalisierbar</u> $:\Longleftrightarrow \Phi_A \in \mathrm{End}(K^n)$ ist diagonalisierbar

$\Longleftrightarrow$ (s.o.) Es existiert eine Basis von K^n, bestehend aus Eigenvektoren von A

$\Longleftrightarrow$ (*) A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix

[zu (*): „$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{A}$ eine geordnete Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von A, d.h. von Φ_A. Dann ist $B := M_{\mathcal{A}}(\Phi_A)$ eine Diagonalmatrix und wegen $A = M_{\mathcal{E}_n}(\Phi_A)$ (6.18) und 6.26(3) ist A zu B ähnlich.

„$\Leftarrow$" Es existiert also $C \in GL(n,K)$ derart, daß $B = CAC^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix ist.

Dann folgt

$$A(C^{-1}e_i) = C^{-1}(Be_i) = C^{-1}(\lambda_i e_i) = \lambda_i C^{-1}e_i \quad \text{für } i = 1,\dots,n,$$

also ist $(C^{-1}e_1, \dots, C^{-1}e_n)$ eine Basis von K^n bestehend aus Eigenvektoren von A ($C^{-1}e_1, \dots, C^{-1}e_n$: Spaltenvektoren von C^{-1})]

7.19 Satz

Seien V ein n-dim. K-Vektorraum und $f \in End(V)$. Dann gilt:

(i) f ist diagonalisierbar $\Rightarrow P_f \in K[t]$ „zerfällt in Linearfaktoren",

d.h. per def.:

$$P_f = (-1)^n (t-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_n) \text{ mit}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ ((nicht notwendig verschieden))

(ii) $P_f = (-1)^n (t-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_n)$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$

$\Rightarrow f$ ist diagonalisierbar

Beweis Zu (i) Nach Vor. existiert eine geordnete Basis $\mathcal{A}$ von V mit $M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Dann folgt

$$P_f = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - t \end{pmatrix} = (-1)^n (t-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_n)$$

Zu (ii) Sei $v_i \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ_i für $i = 1, \ldots, n$. Nach 7.17 ist dann $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von f, q.e.d.

Bemerkung P_f kann in Linearfaktoren zerfallen, ohne daß f diagonalisierbar ist. Genauer gilt:

7.20 Satz (Äquivalente Charakterisierungen der Diagonalisierbarkeit)

Seien V ein n-dim K-Vektorraum und $f \in End(V)$.

Dann sind folgende drei Aussagen (a), (b), (c) paarweise äquivalent:

(a) f ist diagonalisierbar

(b) $P_f \in K[t]$ zerfällt in Linearfaktoren und für jeden Eigenwert $\lambda \in K$ von f stimmen die geometrische Vielfachheit und die algebraische Vielfachheit überein

(c) Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ alle voneinander verschiedenen Eigenwerte von f, so gilt

$$V = Eig_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus Eig_{\lambda_k}(f).$$

Beweis: „(a) $\Rightarrow$ (b)": Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ die voneinander verschiedenen Eigenwerte von f. Für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ sei τ_i die geometrische Vielfachheit und σ_i die algebraische Vielfachheit von λ_i, also $\tau_i \leq \sigma_i$ nach 7.16.

Aus (a) und 7.19(i) folgt die 1. Aussage von (b) sowie

$$\tau_1 + \dots + \tau_k = n = \sigma_1 + \dots + \sigma_k,$$

also muß gelten (wegen $\tau_i \leq \sigma_i$):

$$\tau_i = \sigma_i \text{ für } i = 1, \dots, k$$

„(b) $\Rightarrow$ (c)" Aus (b) folgt (mit den obigen Bezeichnungen)

$$n = \sigma_1 + \dots + \sigma_k \text{ sowie } \tau_i = \sigma_i \text{ für } i = 1, \dots, k,$$

also gilt auch $n = \tau_1 + \dots + \tau_k$, woraus offenbar (c) folgt.

„(c) ⇒ (a)": Sei $(v_{i1}, \dots, v_{is_i})$ eine Basis von $\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$ für $i = 1, \dots, k$. Dann ist nach (c)

$$(v_{11}, \dots, v_{1s_1}, v_{21}, \dots, v_{2s_2}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{ks_k})$$

eine Basis von V, bestehend aus Eigenvektoren von f, also gilt (a), q.e.d.

7.21 Beispiel (Diagonalisierung einer Matrix)

$$A := \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

$$P_A = \det \begin{pmatrix} 8-t & 18 \\ -3 & -7-t \end{pmatrix} = t^2 - 8t + 7t - 56 + 54 = t^2 - t - 2$$
$$= (t-2)(t+1)$$

A hat Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$.

Nach 7.19(iii) ist A diagonalisierbar.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Eig}_2(A) \iff \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathrm{Eig}_{-1}(A) \iff \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} := (v_1, v_2)$$

A ist äquivalent zu der folgenden Diagonalmatrix:

$$\underset{\parallel}{B} = \underset{\parallel}{C} \cdot \underset{\parallel}{A} \cdot \underset{\parallel}{C^{-1}}$$

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi_A) \quad M_{\mathcal{E}_2\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \quad M_{\mathcal{E}_2\mathcal{E}_2}(\Phi_A) \quad M_{\mathcal{B}\mathcal{E}_2}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

hat Spaltenvektoren v_1, v_2

2.5.03 (4.)

7.22

7.22 Def.: Sei V ein n-dim. K-Vektorraum und sei $f \in End(V)$.

(i) f heißt <u>trigonalisierbar</u>

$:\Leftrightarrow$ Es existiert eine geordnete Basis $\mathcal{A}$ von V derart, daß $M_{\mathcal{A}}(f)$ eine „<u>obere Dreiecksmatrix</u>" ist

d.h. unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen

$$M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ dasselbe mit „untere Dreiecksmatrix" (entsprechend definiert)

[Ist $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V, so ist auch $\mathcal{B} := (v_n, \dots, v_2, v_1)$ eine geordnete Basis von V und es gilt offenbar:
$M_{\mathcal{A}}(f)$ ist genau dann eine obere Dreiecksmatrix, wenn $M_{\mathcal{B}}(f)$ eine untere Dreiecksmatrix ist.]

Analoge Def. für Matrizen $A \in M_n(K)$:

A heißt <u>trigonalisierbar</u> $:\Leftrightarrow$ $\Phi_A \in End(K^n)$ ist trigonalisierbar

$\Leftrightarrow$ A ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix

[Denn $A = M_{\mathcal{E}_n}(\Phi_A)$ und daher
$\{M_{\mathcal{A}}(\Phi_A) \mid \mathcal{A}$ geordnete Basis von $K^n\} = \{B \in M_n(k) \mid B$ ähnlich zu $A\}$, vgl. Übungen.]

(ii) Ein Untervektorraum W von V heißt <u>f-invariant</u>, wenn $f(W) \subset W$ gilt.

(iii) Eine Fahne von V ist ein $(n+1)$-Tupel von Untervektorräumen $(V_0, V_1, \dots, V_n)$ von V mit

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V \quad \text{und} \quad \forall_{i \in \{0,\dots,n\}} \dim V_i = i.$$

Die Fahne heißt f-invariant, wenn zusätzlich gilt.

$$\forall_{i \in \{0,\dots,n\}} \; f(V_i) \subset V_i.$$

7.23 Satz (Äquivalente Charakterisierungen der Trigonalisierbarkeit)

Sei V ein n-dim. K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann sind folgende drei Aussagen (a), (b), (c) paarweise äquivalent:

(a) f ist trigonalisierbar.

(b) $P_f \in K[t]$ zerfällt in Linearfaktoren.

(c) Es existiert eine f-invariante Fahne von V.

Beweis: „(a) $\Rightarrow$ (b)": Nach (a) existiert eine geordnete Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ von V derart, daß

$$M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K.$$

Dann folgt

$$P_f = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - t & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - t \end{pmatrix} = (-1)^n (t-\lambda_1) \cdot \dots \cdot (t-\lambda_n),$$

also gilt (b).

„(b) $\Rightarrow$ (c)": Beweis durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_+$.

Im Falle $n = 1$ gelten (b) und (c) trivialerweise, ($\{0\} = V_0 \subset V_1 = V$ ist f-invariante Fahne).

Angenommen $n \in \mathbb{N}_+$, $n \geq 2$ und „(b)⇒(c)" gilt für $n-1$.

Nach (b) gilt

$$P_f = (-1)^n (t-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_n) \quad \text{mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K. \qquad (1)$$

λ_1 ist Eigenwert von f, also können wir einen Eigenvektor v_1 von f zum Eigenwert λ_1 wählen. Wir ergänzen v_1 zu einer geordneten Basis $\mathcal{A} = (v_1, w_2, \ldots, w_n)$ von V.

Dann gilt

$$\left.\begin{aligned} &V = V_1 \oplus W \quad \text{mit} \\ &V_1 := \operatorname{Spann}\{v_1\}, \quad W := \operatorname{Spann}\{w_2, \ldots, w_n\}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

also W $(n-1)$-dim. Untervektorraum von V mit geordneter Basis $\mathcal{B} := (w_2, \ldots, w_n)$.

Wegen (2) existieren eindeutig bestimmte

$$\left.\begin{aligned} &\text{lineare Abbildungen } h: W \to V_1, \; g: W \to W \\ &\text{mit } \forall_{w \in W} \; f(w) = h(w) + g(w) \\ &\qquad\qquad\qquad\quad \uparrow \\ &\qquad\qquad\qquad\quad V \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Sei $A := M_{\mathcal{A}}(f) = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M_n(K)$ und $B := M_{\mathcal{B}}(g) \in M_{n-1}(K)$, $g \in \operatorname{End}(W)$

also wegen $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ und

$$\forall_{j \in \{2,\ldots,n\}} \; f(w_j) = \underbrace{a_{1j} v_1}_{= h(w_j)} + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} a_{ij} w_i}_{= g(w_j)} :$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Mittels (4) folgt:

$$P_f \overset{(1)}{=} P_A \overset{(4)}{=} (\lambda_1 - t)\, P_B = (\lambda_1 - t)\, P_g$$

$$\overset{(1)}{=} (\lambda_1 - t)(-1)^{n-1}(t-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_n)\,,$$

also folgt weiter, indem man durch $\lambda_1 - t \in K[t]\setminus\{0\}$ dividiert (vgl. Ü 42(ii)):

$$P_g = (-1)^{n-1}(t-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_n)\,,$$

also zerfällt auch $P_g \in K[t]$ in Linearfaktoren.

Nach Ind.-Var. „(b)$\Rightarrow$(c)" angewandt auf $g \in \mathrm{End}(W)$ mit $\dim W = n-1$ existiert eine

$$\left.\begin{array}{l} g\text{-invariante Fahne} \\ \{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \ldots\ldots \subset W_{n-1} = W \quad \text{von } W. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Wir setzen

$$V_0 := 0 \quad \text{und} \quad \forall_{i\in\{1,\ldots,n\}}\ V_i \underset{\text{gilt für } i=1 \text{ sowieso bereits (wegen } W_0=\{0\})}{:=} V_1 + W_{i-1} \qquad (6)$$

und werden zeigen:

$$(V_0, \ldots, V_n) \text{ ist eine } f\text{-invariante Fahne von } V\,, \qquad (7)$$

womit dann (c) bewiesen ist.

Zu (7): $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ ist klar nach (6), (5), (2).

$$V_n = V_1 + W_{n-1} = V_1 + W$$

$\dim V_i = i$ ist für $i=0$ klar und folgt für $i \geq 1$ so:

$$\dim V_i \overset{(6)}{=} \dim(V_1 + W_{i-1}) = \underbrace{\dim V_1}_{\overset{(2)}{=}1} + \underbrace{\dim W_{i-1}}_{\overset{(5)}{=}i-1} - \dim(\underbrace{V_1 \cap W_{i-1}}_{\cap(5)}) \qquad V_1 \cap W \overset{(2)}{=} \{0\}$$

$$= 1 + (i-1) = i$$

Zur f-Invarianz: $f(V_0) \subset V_0$ ist trivial. Sei $i \in \{1,\dots,n\}$. Zu zeigen ist $f(V_i) \subset V_i$. Sei also $v \in V_i$. Nach (6),(2) existieren

$$\mu \in K \text{ und } w \in W_{i-1} \text{ mit } v = \mu v_1 + w$$

und es folgt

$$f(v) = \underbrace{\mu f(v_1)}_{\substack{\| \\ \mu\lambda_1 v_1 \\ \cap \\ V_1}} + \underbrace{f(w)}_{\substack{\| (3) \\ h(w)+g(w) \\ \cap(3) \quad \cap(5) \\ V_1 \quad W_{i-1}}} \in V_1 + W_{i-1} \underset{(6)}{=} V_i$$

"(c)⇒(a)": Es sei $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ eine f-invariante Fahne von V. Sei $\{v_1\}$ eine Basis von V_1. Wir ergänzen zunächst $\{v_1\}$ zu einer Basis $\{v_1, v_2\}$ von V_2, sodann $\{v_1, v_2\}$ zu einer Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ von V_3 usw. Auf diese Weise erhalten wir schließlich eine Basis $\{v_1,\dots,v_n\}$ von V mit der Eigenschaft

$$\forall_{i \in \{1,\dots,n\}} \quad \{v_1,\dots,v_i\} \text{ ist Basis von } V_i. \qquad (8)$$

Dann ist $\mathcal{A} := (v_1,\dots,v_n)$ eine geordnete Basis von V und wegen

$$\forall_i \; f(v_i) \underset{(8)}{\in} f(V_i) \subset V_i \underset{(8)}{=} \text{Spann}\{v_1,\dots,v_i\} \text{ ist}$$

$M_{\mathcal{A}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$,

also ist f trigonalisierbar, q.e.d.

7.24 Beispiele

1.) Jeder Polynom $f \in \underline{\underline{\mathbb{C}}}[t]\setminus\{0\}$ vom Grad $n \in \mathbb{N}_+$ zerfällt in Linearfaktoren, d.h.

$$f = c(t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_n) \text{ mit } c \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{C}.$$

[Beweis durch vollst. Induktion über $n = \partial(f) \in \mathbb{N}_+$

$n=1$: f ist von der Gestalt $a_0 + \underset{\neq 0}{a_1} t = a_1(t + \frac{a_0}{a_1})$

Schluß von $n-1 \in \mathbb{N}_+$ auf n : Sei $f \in \mathbb{C}[t]\setminus\{0\}$ mit $\partial(f) = n$.

Nach 7.4, 1.) (Folgerung aus Fundamentalsatz der Algebra) besitzt f eine Nullstelle $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, folglich existiert nach 7.5 ein Polynom $g \in \mathbb{C}[t]\setminus\{0\}$ mit

$$f = (t-\lambda_1)\,g \quad \text{mit } \partial(g) = n-1.$$

Nach Ind. Var. zerfällt g in Linearfaktoren, also

$$g = c(t-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_n) \text{ mit } c \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ \lambda_2,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{C},$$

also folgt

$$f = c(t-\lambda_1)\cdot(t-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_n).\ ]$$

2.) Aus 1.) und 7.23 folgt:

Jeder Endomorphismus eines n-dim. $\mathbb{C}$-Vektorraums ist trigonalisierbar, also auch: Jede Matrix aus $M_n(\mathbb{C})$ ist trigonalisierbar.

3.) Die in 7.11, 3.) betrachtete Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_2)$$

ist nicht trigonalisierbar, denn ihr charakt. Polynom

$P_A = (t-1)^2 \underbrace{(t^2+t+1)}_{\text{ohne Nullstelle}}$ zerfällt nicht in Linearfaktoren.

$\boxed{7.25}$ <u>Satz</u> Seien V ein n-dim. K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ und $\underset{\neq \{0\}}{W} \subset V$ ein m-dim. f-invarianter Untervektoraum von V.

Dann gilt $f|W \in \mathrm{End}(W)$ und

$$\underbrace{P_{f|W}}_{\in K[t] \text{ vom Grad } m} \text{ ist ein Teiler von } \underbrace{P_f}_{\in K[t] \text{ vom Grad } n} \text{ in } K[t].$$

<u>Beweis</u>: Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_{\underline{\underline{m}}})$ eine geordnete Basis von W und sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_{\underline{\underline{n}}})$ eine Fortsetzung zu einer geordneten Basis von V. Wir setzen

$A := M_{\mathcal{A}}(f) \in M_n(K)$, $B := M_{\mathcal{B}}(f|W) \in M_m(K)$, also

wegen $f(W) \subset W$:

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, n-m \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{m} & \underbrace{\quad}_{n-m} \end{array} \end{array}$$

mit einer Matrix $C \in M_{n-m}(K)$,

also

$$P_f = P_A = \det(A - tE_n) = \underbrace{\det(B - tE_m)}_{= P_B = P_{f|W}} \underbrace{\det(C - tE_{n-m})}_{= P_C},$$

also $P_{f|W}$ Teiler von P_f in $K[t]$, q.e.d.

$\boxed{7.26}$ <u>Beispiel.</u> Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

1.) $f := t^n - p \in \underline{\underline{\mathbb{Q}}}[t]$ ist <u>irreduzibel (über $\mathbb{Q}$)</u>, d.h.

per def.: f besitzt in $\mathbb{Q}[t]$ keinen $\underbrace{\text{nichttrivialen}}_{\text{d.h. } \partial(g) \in \{1, \dots, n-1\}}$ Teiler g

(Beachte: Es gilt $\mathbb{Q}[t] \subset \mathbb{R}[t] \subset \mathbb{C}[t]$. In $\mathbb{R}[t]$ besitzt $t^n - p$ den nicht-trivialen Teiler $t - \underbrace{\sqrt[n]{p}}_{\in \mathbb{R}}$, in $\mathbb{C}[t]$ zerfällt $t^n - p$ sogar in Linearfaktoren.)

[Angenommen es existiert doch ein Teiler

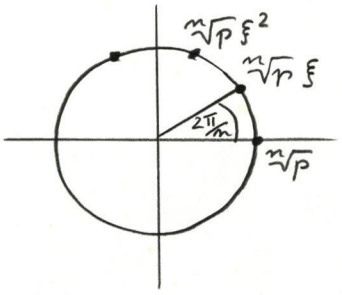
$$g = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j \in \mathbb{Q}[t] \quad \text{mit } \partial(g) = m \in \{1, \dots, n-1\}$$

von f in $\mathbb{Q}[t]$, also $f = g\,h$ mit $h \in \mathbb{Q}[t]$.

f bzw g bzw h, aufgefaßt als Elemente von $\mathbb{C}[t] \supset \mathbb{Q}[t]$, bezeichnen wir mit $\tilde{f}$ bzw. $\tilde{g}$ bzw. $\tilde{h}$. Dann gilt offenbar

$$\tilde{f} = \prod_{k=1}^{n} \underbrace{(t - \sqrt[n]{p}\,\xi^k)}_{=:c_k \in \mathbb{C}} \in \mathbb{C}[t]$$

, wobei $\xi := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ die „primitive n-te Einheitswurzel"



Auch $\tilde{g} \in \mathbb{C}[t]$ zerfällt (nach 7.24, 1.)) in Linearfaktoren und jede Nullstelle $x \in \mathbb{C}$ von $\tilde{g}$ ist auch Nullstelle von $\tilde{f}$

(wegen $\underbrace{\tilde{f}(x)}_{\| F_{\tilde{f}}(x)} = \underbrace{\tilde{g}(x)}_{=0}\,\tilde{h}(x) = 0$) Hieraus folgt

$$\tilde{g} = \prod_{k=1}^{m} (t - c_{j_k}) \quad \text{mit } j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, n\},$$

insbesondere

$$\underbrace{a_0}_{\in \mathbb{Q}} = \underbrace{\tilde{g}(0)}_{\| F_{\tilde{g}}(0)} = (-1)^m \prod_{k=1}^{m} c_{j_k} = (-1)^m \left(\sqrt[n]{p}\right)^m \xi^{\ell},$$

mit $\ell := j_1 + \dots + j_m$

also $\xi^{\ell} \in \mathbb{R}$ und folglich wegen $|\xi| = 1$: $\xi^{\ell} = \pm 1$, weshalb

$\left(\sqrt[n]{p}\right)^m = p^{\frac{m}{n}} \in \mathbb{Q}$. Wir werden zeigen, daß dies zu einem Widerspruch führt.

Aus $p^{m/n} \in \mathbb{Q}$ folgt die Existenz von teilerfremden Zahlen $r, s \in \mathbb{N}_+$ mit $p^{m/n} = \frac{r}{s}$, also $p^m = \frac{r^n}{s^n}$, $r^n = p^{\overbrace{m}^{\geq 1}} s^n$.

Aus $\underbrace{p}_{\text{Primzahl}} | r^n$ folgt $p | r$, also $r = p\,d$ mit $d \in \mathbb{N}_+$ und

Weiter $p^n d^n = p^m s^n$, $p^{\overbrace{n-m}^{\geq 1}} d^n = s^n$.

Aus $\underbrace{p}_{\text{Primzahl}} | s^n$ folgt $p|s$, also $p|r$ und $p|s$ ein Widerspruch dazu, daß r, s teilerfremd.]

2.) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Q}),$$

mit einer Primzahl $p \in \mathbb{N}$ und mit $n \geq 2$.

Dann gilt: Es existiert kein nichttrivialer (d.h. von $\{0\}$ und $\mathbb{Q}^n$ verschiedener) $\underbrace{\Phi_A}_{\in End(\mathbb{Q}^n)}$ - invarianter Untervektorraum von $\mathbb{Q}^n$.

[Denn $P_{\Phi_A} = P_A = \det(A - tE_n) \overset{\text{Entwickl. 1. Zeile}}{=} (-t) \det \underbrace{\begin{pmatrix} -t & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & -t \end{pmatrix}}_{\in M_{n-1}(\mathbb{Q}(t))}$

$$+ (-1)^{n+1} p \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{\in M_{n-1}(\mathbb{Q}(t))}$$

$$= (-1)^n (t^n - p) \in \mathbb{Q}[t]$$

Nach 1.) besitzt daher P_{Φ_A} keinen nichttrivialen Teiler in $\mathbb{Q}[t]$, also folgt die Beh. aus Satz 7.25.]

$\boxed{7.27}$ Def.: Sei R ein kommutativer Ring

Eine Teilmenge $I \subset R$ heißt Ideal von R, wenn

$$I - I \subset I \quad , \text{d.h. } \forall_{u,v \in I} \; u - v \in I$$

und

$$\underset{\substack{\| \\ IR}}{RI} \subset I \quad , \text{d.h. } \forall_{u \in I} \forall_{w \in R} \; \underset{\substack{\| \\ uw}}{wu} \in I .$$

Insbesondere ist also ein Ideal von R stets ein Unterring von R.

Beispiele 1.) Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ ist $m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ein Ideal von $\mathbb{Z}$

2.) $\mathbb{Z}$ ist ein Unterring von $\mathbb{Q}$, aber $\mathbb{Z}$ ist kein Ideal von $\mathbb{Q}$.

3.) Für jeden Homomorphismus $F : R \to \tilde{R}$ zwischen Ringen ist $\operatorname{Kern} F = F^{-1}(\{0\})$ ein Ideal von R.

[Denn $\forall_{u,v \in \operatorname{Kern} F} \; F(u-v) = \underbrace{F(u)}_{=0} - \underbrace{F(v)}_{=0} = 0$ und

$\forall_{u \in \operatorname{Kern} F} \forall_{w \in R} \; F(wu) = F(w) \underbrace{F(u)}_{=0} = 0$.]

$\boxed{7.28}$ $\boxed{\text{Satz}}$ Sei $I \neq \{0\}$ ein Ideal von $K[t]$. Dann existiert genau ein $h \in I \setminus \{0\}$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

$$I = h\,K[t] = \{hf \mid f \in K[t]\} \qquad (1)$$

und

$$\left.\begin{array}{l} h \text{ ist normiert, d.h. der höchste auftretende Koeffizient} \\ \text{ist gleich } 1 \\ \left(h = \underline{\underline{t}}^d + a_{d-1}t^{d-1} + \ldots + a_1 t + a_0\right) \end{array}\right\} (2)$$

9.5.03
(6.)

Beweis: Sei $d := \min\{\underbrace{\partial(g)}_{\in \mathbb{N}} \mid g \in I \setminus \{0\}\} \in \mathbb{N}$. Wir können ein normiertes Polynom $h \in I \setminus \{0\}$ wählen mit $\partial(h) = d$.

Dann folgt:

$$I = h\,K[t].$$

[„⊃" klar wegen $\underbrace{h}_{\in I} K[t] \subset I\,K[t] \subset I$, da I Ideal von $K[t]$

„⊂": Sei $g \in I$. Nach Ü 42(ii) gilt

$$g = \underbrace{h}_{\neq 0} q + r \quad \text{mit } q, r \in K[t] \text{ und } (r = 0 \text{ oder } \partial(r) < \partial(h) = d)$$

Angen. es gilt $r \neq 0$. Dann folgt $\partial(r) < d$ und

$$r = \underbrace{g}_{\in I} - \underbrace{h\,q}_{\in I\,K[t] \subset I} \in I - I \subset I$$

im Widerspruch zur Def. von d.

Daher muß $r = 0$ gelten, also $g = hq \in h\,K[t]$]

Damit ist die Existenz von h wie in der Beh. gezeigt.

Zur Eindeutigkeit: Angenommen $\tilde{h} \in I \setminus \{0\}$ habe ebenfalls die Eigenschaften (1) und (2).

Aus $h \in I = \tilde{h}\,K[t]$ folgt die Existenz eines $f \in K[t] \setminus \{0\}$ mit $h = \tilde{h} f$, weshalb $\partial(h) = \partial(\tilde{h}) + \underbrace{\partial(f)}_{\geq 0} \geq \partial(\tilde{h})$, und analog folgt $\partial(\tilde{h}) \geq \partial(h)$. Daher gilt $\partial(\tilde{h}) = \partial(h) = d$, also $\partial(f) = \partial(h) - \partial(\tilde{h}) = 0$, also f konstant von einem Wert $a \in K \setminus \{0\}$, also $h = \tilde{h} f = \tilde{h}\,a$. Hieraus folgt schließlich, da sowohl h als auch $\tilde{h}$ normierte Polynome sind, daß $a = 1$, d.h. $h = \tilde{h}$, q.e.d.

Bemerkung Für einen beliebigen kommutativen Ring R und ein bel. Element $b \in R$ ist $I := bR$ offenbar stets ein Ideal von R. bR heißt das von b erzeugte Hauptideal von R.

Der letzte Satz besagt: Jedes Ideal von $K[t]$ ist ein Hauptideal, d.h. per def.: $K[t]$ ist ein sog. Hauptidealring.

7.29 Def. (Einsetzung von Endomorphismen in Polynome bzw. Matrizen)

Sei V ein n-dim. K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$.

(i) $\varphi_f : K[t] \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ sei definiert durch

$$h \longmapsto \boxed{h(f)} =: \varphi_f(h)$$

$$\forall_{h = a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k \in K[t]} \quad \boxed{h(f) := a_0 \underbrace{\mathrm{id}_V}_{=: f^0} + a_1 f + a_2 \underbrace{f^2}_{f \circ f} + \ldots + a_k \underbrace{f^k}_{\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k}}}$$

Offenbar ist φ_f ein Homomorphismus unitärer Ringe und zugleich ein K-Vektorraum-Homom., d.h. eine K-lineare Abb.

Bild $\varphi_f = \{h(f) \mid h \in K[t]\}$ ist ein kommutativer Unterring des (i.a. nicht kommutativen) Rings $\mathrm{End}(V)$.

φ_f heißt der Einsetzungshomomorphismus von f.

φ_f ist der einzige Ringhomom. $K[t] \to \mathrm{End}(V)$ mit

$$\varphi_f(1) = \mathrm{id}_V \quad \text{und} \quad \varphi_f(t) = f.$$

φ_f ist auch die einzige K-lineare Abb. $K[t] \to \mathrm{End}(V)$ mit

$$\varphi_f(\underbrace{1}_{=: t^0}) = \underbrace{\mathrm{id}_V}_{=: f^0} \quad \text{und} \quad \forall_{j \in \mathbb{N}_+} \; \varphi_f(t^j) = f^j = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{j}.$$

Entsprechende Definition für Matrizen $A \in M_n(K)$:

$$K[t] \longrightarrow M_n(K)$$
$$h \longmapsto \boxed{h(A)}$$

$$\forall_{h = a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k \in K[t]} \quad \boxed{h(A) := a_0 \underbrace{E_n}_{=: A^0} + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_k A^k}$$

Dann gilt

$$(*) \quad \forall_{h \in K[t]} \; \Phi_{h(A)} = h(\Phi_A), \quad \text{d.h.}$$

($\Phi_{h(A)} \in \mathrm{End}(K^n)$, $h(\Phi_A) \in \mathrm{End}(K^n)$)

$$\begin{array}{ccc} A & \longmapsto & h(A) \\ M_n(K) & \longrightarrow & M_n(K) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \mathrm{End}(K^n) & \longrightarrow & \mathrm{End}(K^n) \\ f & \longmapsto & h(f) \end{array}$$

ist kommutativ,

wegen $\Phi_{h(A)} = \Phi \sum_{i=0}^{k} a_i A^i \underset{4.23(iii)}{=} \sum_{i=0}^{k} a_i \Phi(A)^i = h(\Phi_A)$.

$\varphi_f : K[t] \longrightarrow End(V)$ ist nicht injektiv, denn $\dim_K K[t] = \infty$ und $\dim_K End(V) = n^2$.

Die n^2+1 Elemente $\underset{id_V}{f^0}, f^1, f^2, \ldots, f^{(n^2)}$ von $End(V)$ müssen K-linear abhängig sein, also muß $h \in K[t] - \{0\}$ existieren mit $\partial(h) \leq n^2$ und $h(f) = 0$. Der nächste Satz wird zeigen, daß sogar stets ein derartiges h mit $\partial(h) \leq n$ existiert.

(ii) $\operatorname{Kern} \varphi_f = \{h \in K[t] \mid h(f) = 0\}$ ist ein Ideal von $K[t]$ (nach 7.27, Beispiel 3.)).

Nach 7.28 existiert daher genau ein normiertes Polynom $\boxed{m_f} \in K[t] - \{0\}$ mit

$$\operatorname{Kern} \varphi_f = m_f K[t]$$

m_f heißt das Minimalpolynom von f

Ist $A \in M_n(K)$, also $\Phi_A \in End(K^n)$, so gilt

$$\operatorname{Kern} \varphi_{\Phi_A} \overset{n.o.}{=} \{h \in K[t] \mid \underbrace{h(\Phi_A)}_{\Phi_{h(A)} \text{ (*)}} = 0\} \underset{4.23(iii)}{=} \{h \in K[t] \mid h(A) = 0\}$$

$\| n.o.$

$m_{\Phi_A} K[t]$.

Wir setzen $\boxed{m_A} := m_{\Phi_A}$ und nennen m_A das Minimalpolynom von A.

7.30 Satz (von Cayley-Hamilton)

Seien V ein n-dim. K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$.

$P_f = \underbrace{a_0}_{\det f} + a_1 t + \ldots + \underbrace{a_n}_{(-1)^n} t^n \in K[t]$ sei das charakteristische Polynom von f. Dann gilt:

$$P_f(f) = a_0 \mathrm{id}_V + a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_n f^n = 0 \in \mathrm{End}(V).$$

Beweis: Sei $v \in V$. Zu zeigen ist $P_f(f)(v) = 0$. Im Falle $v = 0$ ist dies klar. Im folgenden nehmen wir an, daß $v \neq 0$. Sei

$$\left.\begin{array}{l} k \in \mathbb{N} \text{ die größte natürliche Zahl derart, daß} \\ \overset{*}{0} v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{k-1}(v) \in V \text{ linear unabhängig,} \end{array}\right\} (1)$$

also $k \in \{1, \ldots, n\}$. Wir setzen

$$\left.\begin{array}{l} v_1 := v, \quad v_2 := f(v_1) = f(v), \quad v_3 := f(v_2) = f^2(v), \ldots \\ \ldots v_k := f(v_{k-1}) = f^{k-1}(v) \end{array}\right\} (2)$$

Nach (1), (2) ist $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_k)$ eine geordnete Basis des $\underbrace{k}_{\geq 1}$-dim Untervektorraums

$$W := \mathrm{Spann}\{v_1, \ldots, v_k\} = \mathrm{Spann}\{v, f(v), \ldots, f^{k-1}(v)\}$$

von V. Nach Def. von k gilt

$$f(v_k) \underset{(2)}{=} f^k(v) \in \mathrm{Spann}\{v, f(v), \ldots, f^{k-1}(v)\} = W,$$

also existieren $\beta_1, \ldots, \beta_k \in K$ mit

$$\underbrace{f(v_k)}_{f^k(v)} = -\sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i \qquad (3)$$

Damit ist gezeigt: W ist ein f-invarianter Unter-vektorraum von V, also $f|W \in \mathrm{End}(W)$, und

$$M_{\mathcal{B}}(f|W) \underset{(2),(3)}{=} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\beta_1 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & -\beta_{k-1} \\ 0 & & 1 & -\beta_k \end{pmatrix} \in M_k(K) \qquad (4)$$

13.5.03
(7.)

Nach 7.25 ist $P_{f|W}$ ein Teiler von P_f in $K[t]$, d.h. es existiert $h \in K[t]$ mit

$$P_f = h \cdot P_{f|W},$$

also auch

$$\underbrace{P_f(f)}_{\in \mathrm{End}(V)} = \underbrace{h(f)}_{\in \mathrm{End}(V)} \circ \underbrace{P_{f|W}(f)}_{\in \mathrm{End}(V)}.$$

Zum Nachweis von $P_f(f)(v) = 0$ genügt es daher zu zeigen, daß $P_{f|W}(f)(v) = 0$.

Beweis hiervon: Nach (4) und Ü 73 gilt

$$P_{f|W} = P_{M_{\mathcal{B}}(f|W)} = (-1)^k (\beta_1 + \beta_2 t + \ldots + \beta_k t^{k-1} + t^k),$$

also folgt:

$$P_{f|W}(f)(v) = (-1)^k \Big(\underbrace{\beta_1 \mathrm{id}_V(v) + \beta_2 f(v) + \ldots + \beta_k f^{k-1}(v)}_{\underset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i} + f^k(v) \Big)$$

$$\underset{(3)}{=} 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

Version des Satzes von Cayley-Hamilton für Matrizen

Sei $A \in M_n(K)$ und sei $P_A = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \in K[t]$ das charakt. Polynom von A. Dann gilt

$$P_A(A) = a_0 E_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n = 0 \in M_n(K)$$

[Denn wegen $A = M_{\mathcal{E}_n}(\Phi_A)$ gilt $P_{\Phi_A} = P_A$, also

$\Phi_{P_A(A)} \underset{7.29(*)}{=} P_A(\Phi_A) = P_{\Phi_A}(\Phi_A) \underset{C.H.}{=} 0$ und daher $P_A(A) = 0$]

2 falscher Beweis: "$P_A = \det(A - tE_n) \Rightarrow P_A(A) = \det(\underbrace{A + AE_n}_{=0}) = 0$"

Beachte dabei: Für alle $B \in M_n(K)$ gilt

$P_A(B) \in M_n(K)$, aber $\det(A - BE_n) = \det(A - B) \in K$,

also $P_A(B) = \det(A - BE_n)$ im Falle $n \geq 2$ unmöglich

Folgerungen:

1.) Das Minimalpolynom $m_f \in K[t]$ von $f \in \mathrm{End}(V)$ (V n-dim K-Vektorraum) ist ein Teiler des charakteristischen Polynoms $P_f \in K[t]$ von f.

[Denn wegen $P_f(f) \underset{C.H.}{=} 0$ (= $\varphi_f(P_f)$) gilt nach 7.29(ii):

$P_f \in \ker \varphi_f = m_f K[t]$]

2.) Für $A \in M_n(K)$ folgt im Falle $\det A \neq 0$, falls

$P_A = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$:

($a_0 = \det A$, $a_n = (-1)^n$)

$$\boxed{A^{ad} = -\sum_{i=1}^{n} a_i A^{i-1}} = -a_1 E_n - a_2 A - a_3 A^2 - \dots - a_n A^{n-1}$$

$$\boxed{A^{-1} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_0} A^{i-1}}$$

$$\left[\text{Denn } \left(-\sum_{i=1}^{n} a_i A^{i-1}\right) A = -\sum_{i=1}^{n} a_i A^i \underset{\text{C.H.}}{=} \underbrace{a_0}_{=\det A} E_n \underset{6.14(ii)}{=} A^{ad} A\right.$$

Durch Multiplikation mit $\bar{A}^{-1}$ von rechts folgen die behaupteten Formeln für A^{ad} und $\bar{A}^{-1}$.]

7.31 **Def.**: Sei V ein K-Vektorraum (nicht-notwendig endlich-dimensional!) und sei $f \in \mathrm{End}(V)$.

f heißt <u>nilpotent</u> $:\Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}_+} f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k} = 0 \in \mathrm{End}(V)$

Ist f nilpotent, so heißt die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}_+$ mit $f^k = 0$ der <u>Nilpotenzindex</u> (auch kurz: <u>Index</u>) von f.
f heißt dann auch <u>nilpotent vom Index k</u>.

Analoge Def. für Matrizen $A \in M_n(K)$:
A heißt <u>nilpotent</u> $:\Leftrightarrow \Phi_A \in \mathrm{End}(\overbrace{K^n}^{\text{ist } n\text{-dimensional}})$ ist nilpotent

$$\underset{\text{s.o.}}{\Leftrightarrow} \exists_{k \in \mathbb{N}_+} \underbrace{(\Phi_A)^k}_{=\Phi_{A^k}} = 0 \in \mathrm{End}(K^n)$$

$$\Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}_+} A^k = 0 \in M_n(K)$$

Ist A nilpotent, so ist der <u>Nilpotenzindex (= Index)</u> von A def. als der Nilpotenzindex von Φ_A und damit als die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}_+$ mit $A^k = 0$.
A heißt dann auch <u>nilpotent vom Index k</u>.

<u>Beispiele</u>

1.) $$N(n) := \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

ist nilpotent vom Index n.

[Denn $N(n) = M_{\mathcal{E}_n}(f)$, wobei $f \in \mathrm{End}(K^n)$ mit

$$f(e_1) = e_2,\ \underset{\substack{\| \\ f^2(e_1)}}{f(e_2)} = e_3,\ \ldots,\ \underset{\substack{\| \\ f^{n-1}(e_1)}}{f(e_{n-1})} = e_n,\ \underset{\substack{\| \\ f^n(e_1)}}{f(e_n)} = 0 .$$

Wegen $\forall_{i \in \{2,\ldots,n\}}\ f^n(e_i) = f^n(\underbrace{f^{i-1}(e_1)}_{e_i}) = f^{i-1}(\underbrace{f^n(e_1)}_{=0}) = 0$

gilt $f^n = 0 \in \mathrm{End}(K^n)$ und wegen $f^{n-1}(e_1) = e_n \neq 0$ ist daher f, d.h. $N(n)$, nilpotent vom Index n.]

2)
$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} N(3) & 0 \\ \hline 0 & N(2) \end{array}\right) \in M_5(K)$$

ist nilpotent vom Index 3.

$\boxed{7.32}$ $\boxed{\text{Satz}}$

Seien V ein n-dim. K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$.
Ferner seien $k \in \mathbb{N}_+$ und $v \in V$ mit $f^{k-1}(v) \neq 0$ und $f^k(v) = 0$.
Dann folgt:

$$\underset{\substack{\| \\ f^0(v)}}{v},\ f(v),\ f^2(v), \ldots, f^{k-1}(v) \in V \text{ sind } K\text{-linear unabhängig.}$$

<u>Beweis:</u> Vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N}_+$.

Im Falle $k = 1$ gilt $v = f^0(v) \neq 0$, also ist v lin. unabh.
Angenommen der Satz ist für $k-1 \in \mathbb{N}_+$ bewiesen und für $v \in V$ gilt $f^{k-1}(v) \neq 0$ und $f^k(v) = 0$, also auch $\forall_{\ell \in \mathbb{N}}\ f^{k+\ell}(v) = f^\ell(f^k(v)) = f^\ell(0) = 0$. Seien $a_1, \ldots, a_k \in K$ mit

$$a_1 v + a_2 f(v) + a_3 f^2(v) + \ldots + a_k f^{k-1}(v) = 0. \quad (1)$$

Zu zeigen ist: $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$.

Durch Anwendung von $f^{k-1} \in \mathrm{End}(V)$ auf (1) erhält man

$$a_1 \underbrace{f^{k-1}(v)}_{\neq 0} + a_2 \underbrace{f^k(v)}_{=0} + a_3 \underbrace{f^{k+1}(v)}_{=0} + \ldots\ldots + a_k \underbrace{f^{2k-2}(v)}_{=0} = 0 ,$$

also $a_1 = 0$ und folglich nach (1):

$$a_2 f(v) + a_3 f(f(v)) + \ldots + a_k f^{k-2}(f(v)) = 0 . \qquad (2)$$

Wegen $f^{k-2}(f(v)) = f^{k-1}(v) \neq 0$ und $f^{k-1}(f(v)) = f^k(v) = 0$ können wir die Ind.-Vor. auf $f(v) \in V$ anwenden, also sind

$$f(v), f(f(v)), \ldots, f^{k-2}(f(v)) \in V \text{ linear unabh.},$$

weshalb nach (2) auch $a_2 = a_3 = \ldots = a_k = 0$ gilt, q.e.d.

7.33 Satz

Sei V ein n-dim. K-Vektorraum. Dann hat jeder nilpotente Endomorphismus von V einen Index $\leq n$.

Beweis: Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent vom Index $k \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt $f^{k-1} \neq 0$ und $f^k = 0$, also existiert $v \in V$ mit $f^{k-1}(v) \neq 0$ und $\underbrace{f^k}_{=0}(v) = 0$.
Dann folgt aus 7.32: $v, f(v), \ldots, f^{k-1}(v)$ sind k linear unabhängige Elemente von V, also wegen $\dim V = n$: $k \leq n$, q.e.d.

7.34 Satz

Sei V ein $\underline{\underline{n}}$-dim. K-Vektorraum und sei $f \in End(V)$ nilpotent vom Index $\underline{\underline{n}}$.
Dann existiert eine geordnete Basis $\mathcal{A}$ von V derart, daß

$$M_{\mathcal{A}}(f) = N(n) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(7.31 Beispiel 1.)

Beweis: Nach Vor. exist $v \in V$ mit $f^{n-1}(v) \neq 0$ und $f^{(n)}(v) = 0$. Aus 7.32 folgt dann die lineare Unabhängigkeit der n Vektoren

$$v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v) \in V$$

des n-dim Vektorraums V, also ist $\mathcal{A} := (v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ eine geordnete Basis von V. Offenbar gilt

$M_{\mathcal{A}}(f) = N(n)$, q. e. d.

7.35 Def. Seien V ein n-dim. K-Vektorraum und $f \in End(V)$.
Ein $\underbrace{k}_{\geq 1}$-dim. Untervektorraum W von V heißt zyklisch bzgl. f, wenn ein $v \in V$ existiert mit folgenden Eigenschaften:

$f^k(v) = 0$ und $\{v, f(v), \ldots, f^{k-1}(v)\}$ ist eine Basis von W

Ist dies der Fall, so heißt $\mathcal{A} := (v, f(v), \ldots, f^{k-1}(v))$ eine zyklische Basis von W und es gilt offenbar

W ist f-invariant, $f|W \in End(W)$ ist nilpotent vom Index k und $M_{\mathcal{A}}(f|W) = N(k)$.

Nach Satz 7.34 gilt: Ist $f \in End(V)$ nilpotent vom Index $n = \dim V$, so ist V zyklisch bzgl. f.

7.36 Satz

Sei V ein n-dim. K-Vektorraum, sei $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent vom Index $k \in \{1, \dots, n-1\}$ und sei $v \in V$ mit $f^{k-1}(v) \neq 0$.

Dann ist

$$W := \mathrm{Span}\{v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)\}$$

ein k-dim. bzgl. f zyklischer (also auch f-invarianter) Untervektorraum von V und es existiert ein f-invarianter Untervektorraum U von V derart, daß

$$V = W \oplus U.$$

Zusatz: Ist H ein $(n-1)$-dim. Untervektorraum von V mit $f^{k-1}(v) \notin H$, so hat

$$U := \{u \in V \mid f^i(u) \in H \text{ für } i = 0, \dots, k-1\} \quad (*)$$

die genannten Eigenschaften.

Beweis: Wegen $f^{k-1}(v) \neq 0$, $\underbrace{f^k(v)}_{=0} = 0$ sind nach 7.32 $v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)$ linear unabhängig, also ist W k-dimensional und zyklisch bzgl. f.

Seien H und U wie im Zusatz. $U = \bigcap_{i=0}^{k-1} (f^i)^{-1}(H)$ ist Untervektorraum von V als Durchschnitt von Untervektorräumen.

Wir behaupten:

$$U \text{ ist } f\text{-invariant.} \quad (1)$$

[Zu (1): Sei $u \in U$, d.h. $f^i(u) \in H$ für $i = 0, \dots, k-1$.

Wegen $\underbrace{f^k(u)}_{=0} = 0$ gilt dann auch $f^i(f(u)) = f^{i+1}(u) \in H$ für $i = 0, \dots, k-1$, d.h. $f(u) \in U$.]

Zu zeigen bleibt $V = W \oplus U$. Dazu beweisen wir zunächst:

$$W \cap U = \{0\}. \qquad (2)$$

[Zu (2): Sei $u \in W \cap U$. Wegen $u \in W$ existieren $a_1, \dots, a_k \in K$ mit

$$u = a_1 v + a_2 f(v) + \dots + a_k f^{k-1}(v),$$

und aus $u \in U$ folgt wegen $f^k = 0$, $f^{k-1}(v) \notin H$ der Reihe nach

$$\underbrace{f^{k-1}(u)}_{\in H} = a_1 \underbrace{f^{k-1}(v)}_{\notin H}, \quad a_1 = 0,$$

$$\underbrace{f^{k-2}(u)}_{\in H} = a_2 f^{k-1}(v), \quad a_2 = 0$$

usw. bis

$$\underbrace{f(u)}_{\in H} = a_{k-1} f^{k-1}(v), \quad a_{k-1} = 0$$

$$\underbrace{u}_{\in H} = a_k f^{k-1}(v), \quad a_k = 0,$$

also $u = 0$.]

Wir zeigen als nächstes:

$$\dim U \geq n - k. \qquad (3)$$

[Zu (3): Sei $(z_1, \dots, z_{n-1})$ eine geordnete Basis von H und $z_n := f^{k-1}(v) \in V \setminus H$, also $\mathcal{A} := (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)$ eine geordnete Basis von V. Sei $\mathcal{A}^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ die dazu duale Basis von $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$, also (vgl. 6.22): $\forall_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \varphi_i(z_j) = \delta_{ij}$.

Wir definieren

$$\forall_{i \in \{0,\dots,k-1\}} \quad \psi_i := \varphi_n \circ f^i \in V^* \qquad \left(V \xrightarrow{f^i} V \xrightarrow{\varphi_n} K, \ \psi_i \right)$$

und

$$\psi := (\psi_0, \dots, \psi_{k-1}) : V \longrightarrow K^k, \qquad z \longmapsto (\psi_0(z), \dots, \psi_{k-1}(z))$$

also $\psi : V \to K^k$ linear.

Es gilt $\boxed{\forall_{y \in V} \quad y = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(y)\, z_j} \qquad (4)$

(Denn zu $y \in V$ existieren $\mu_1, \dots, \mu_n \in k$ mit $y = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \cdot z_j$,

also $\forall_{i \in \{1,\dots,n\}} \quad \varphi_i(y) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \underbrace{\varphi_i(z_j)}_{\delta_{ij}} = \mu_i$)

Für alle $z \in V$ gilt

$$\Psi(z) = 0 \iff \forall_{i \in \{0,\dots,k-1\}} \quad \psi_i(z) = \varphi_n(\underbrace{f^i(z)}_{\| (4)}) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(f^i(z))\, z_j$$

$$\underset{(4)}{\iff} \forall_{i \in \{0,\dots,k-1\}} \quad f^i(z) \in \operatorname{Spann}\{z_1, \dots, z_{n-1}\} = H$$

$$\underset{(*)}{\iff} z \in U,$$

also $U = \operatorname{Kern} \Psi$ und folglich

$$\underbrace{\dim(\operatorname{Kern}\Psi)}_{= \dim U} = \underbrace{\dim V}_{= n} - \underbrace{\dim(\overbrace{\operatorname{Bild}\Psi}^{\subset k})}_{\leq k} \geq n - k. \;]$$

Nunmehr folgt mittels (2), (3):

$$n = \dim V \geq \dim(\underbrace{W+U}_{\subset V}) = \underbrace{\dim W}_{=k} + \underbrace{\dim U}_{\geq n-k \ (3)} - \underbrace{\dim(W \cap U)}_{=0 \ (2)} \geq n,$$

also $\dim(W+U) = n = \dim V$ und daher $W + U = V$,

folglich nach (2) $\quad V = W \oplus U$, $\quad$ q.e.d

7.37 Satz

Sei V ein n-dim. K-Vektorraum und sei $f \in End(V)$ nilpotent vom Index k.

Dann existieren positive natürliche Zahlen r und $k = k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r$ sowie bzgl. f zyklische Untervektorräume W_i von V mit $\dim W_i = k_i$ für $i = 1, \dots, r$ derart, daß

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r .$$

Beweis: Vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_+$:

Für $n = 1$ ist $f = 0$ und $V (=: W_1)$ ist zyklischer Untervektorraum von V, also gilt die Behauptung.

Wir nehmen nun an, daß $n \geq 2$ und daß die Beh. für $\dim V \leq n-1$ bewiesen ist.

Sein nun $\dim V = n$ und $f \in End(V)$ nilpotent vom Index k, also nach 7.33 : $k \in \{1, \dots, n\}$.

Im Falle $k = n$ ist nach 7.35 wiederum ganz $V (=: W_1)$ zyklischer Untervektorraum von V.

Im folgenden sei daher $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Es existiert also ein $v \in V$ mit $f^{k-1}(v) \neq 0$. Nach 7.36 existieren dann ein $\underbrace{k\text{-dim.}}_{=: k_1}$ bzgl. f zyklischer Untervektorraum W_1 von V und ein weiterer f-invarianter Untervektorraum U von V derart, daß

$$V = W_1 \oplus U .$$

U ist ein K-Vektorraum der Dimension $n - k_1 \leq n-1$.

$f|_U \in End(U)$ ist nilpotent von einem Index $k_2 \leq k_1$ (denn aus $f^{k_1} = 0$ folgt $(f|_U)^{k_1} = 0$). Daher läßt sich die Ind.-Vor. auf U und $f|_U \in End(U)$ anwenden

und es folgt die Existenz einer direkten Summenzerlegung

$$\mathcal{U} = W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$$

mit bzgl. f zyklischen Untervektorräumen $W_2, \ldots, W_r$ von $\mathcal{U}$ mit $\dim W_i = k_i$ für $i = 2, \ldots, r$ und $k_2 \geq k_3 \geq \ldots \geq k_r \geq 1$.

Wegen

$$V = W_1 \oplus \mathcal{U} = W_1 \oplus (W_2 \oplus \ldots \oplus W_r) = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$$

ist damit die Behauptung bewiesen , q.e.d

20.5.03 (9.)

7.38 Satz (Lösung des Normalformenproblems für nilpotente Endomorphismen)

Sei V ein n-dim. K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent vom Index k.

Dann existieren eindeutig bestimmte positive natürliche Zahlen r und $k = k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_r$ derart, daß eine geordnete Basis $\mathcal{A}$ von V existiert mit

$$M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} N(k_1) & & & 0 \\ & N(k_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & N(k_r) \end{pmatrix}, \quad (*)$$

Für heißt die kanon. Normalform von f

(wobei $N(k_i) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{k_i}(K)$).

Zusatz: Wir setzen $r_i := \mathrm{Rang}(f^i) := \dim(f^i(V))$ für $i \in \mathbb{N}$.

Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt für die Anzahl $a_i := \#\{j \in \{1, \ldots, r\} \mid k_j = i\}$ der „Blöcke" $N(i) \in M_i(K)$ in $(*)$:

$$a_i = r_{i+1} - 2r_i + r_{i-1}.$$

← nur abhängig von f und i !!

Beweis Wir beweisen zunächst den Satz ohne die Eindeutigkeitsaussage und ohne den Zusatz.

Wir wenden Satz 7.37 an und wählen $r, k_1, \dots, k_r$, $W_1, \dots, W_r$ wie dort.

Für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$ sei $\mathcal{A}_i = (w_{i1}, \dots, w_{ik_i})$ eine zyklische Basis von W_i. Dann gilt $M_{\mathcal{A}_i}(\underbrace{f|W_i}_{\in \mathrm{End}(W_i)}) = N(k_i)$, (vgl. 7.35).

$$\mathcal{A} := (w_{11}, \dots, w_{1k_1}, w_{21}, \dots, w_{2k_2}, \dots\dots, w_{r1}, \dots, w_{rk_r})$$

ist eine geordnete Basis von V und $M_{\mathcal{A}}(f)$ hat offenbar die Gestalt (*). Damit ist die Existenzaussage bewiesen. Die Eindeutigkeitsaussage und der Zusatz sind eine triviale Folge des folgenden Satzes:

7.39 Satz

Sei V ein n-dim. K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent vom Index k. Ferner sei

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$$

eine direkte Summenzerlegung von V mit bzgl. f zyklischen Untervektorräumen $W_1, \dots, W_r$. Wir setzen:

$$\forall_{i \in \mathbb{N}} \; \tau_i := \mathrm{Rang}(f^i) = \dim(f^i(V)) \in \mathbb{N}$$

und

$$\forall_{i \in \mathbb{N}_+} \; a_i := \#\{j \in \{1, \dots, r\} \mid \dim W_j = i\} \in \mathbb{N}$$

Dann gilt:

$$a_i = \tau_{i+1} - 2\tau_i + \tau_{i-1} \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

Beweis 1) Sei $j \in \{1, \dots, r\}$ und $s := \dim W_j$. Sei $(v, f(v), \dots, f^{s-1}(v))$ eine zyklische Basis von W_j. Dann ist $(f(v), f^2(v), \dots f^{s-1}(v))$ eine Basis von $f(W_j)$, ferner ist $(f^2(v), \dots, f^{s-1}(v))$ eine Basis von $f^2(W_j)$ usw., ...

schließlich ist $(f^{s-1}(v))$ eine Basis von $f^{s-1}(W_j)$, während $f^s(W_j) = \{0\}$. Damit ist gezeigt, daß

$$\forall_{i \in \mathbb{N}} \quad \dim f^i(W_j) = \begin{cases} s-i & , \text{falls } s > i \\ 0 & , \text{falls } s \leq i \end{cases}$$

2.) Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt wegen der f-Invarianz von $W_1, \dots, W_r$:

$$r_i = \dim(f^i(V)) = \sum_{j=1}^{r} \dim f^i(W_j)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ \dim W_j = s}}^{r} \underbrace{\dim f^i(W_j)}_{\begin{cases} s-i & , \text{falls } s > i \\ 0 & , \text{falls } s \leq i \end{cases}}$$

↑ Anzahl dieser j ist gleich a_s

$$= \sum_{s=i+1}^{n} (s-i)\, a_s = \sum_{s=1}^{n-i} s\, \underbrace{a_{s+i}}_{=0 \text{ für } s > n-i, \text{ d.h. } s+i > n}$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} s\, a_{s+i}$$

↑ de facto endliche Summe,

Hieraus folgt (für alle $i \in \{1, \dots, n\}$):

$$r_{i+1} - 2r_i + r_{i-1} = \sum_{s=1}^{\infty} s\, a_{s+i+1} - 2 \sum_{s=1}^{\infty} s\, a_{s+i} + \sum_{s=1}^{\infty} s\, a_{s+i-1}$$

$$= \sum_{s=2}^{\infty} (s-1)\, a_{s+i} - 2 \sum_{s=1}^{\infty} s\, a_{s+i} + \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)\, a_{s+i}$$

$$= \sum_{s=2}^{\infty} \underbrace{(s-1-2s+s+1)}_{=0} a_{s+i} - 2a_{i+1} + a_i + 2a_{i+1}$$

$$= a_i \,, \quad \text{q.e.d.}$$

↑ ↗ Man darf so rechnen, da de facto alle Summen endlich sind!

7.40 **Beispiel** (Interessantes über die Fibonacci-Zahlen)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der „Fibonacci-Zahlen" ist rekursiv definiert durch

$$\boxed{a_0 := 0\,,\ a_1 := 1 \text{ und } \forall_{n\geq 2}\ a_n := a_{n-1} + a_{n-2}}\,,$$

also

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$$

Wir wollen mittels Eigenwerttheorie eine explizite Formel $a_n = f(n)$ gewinnen.

Andere Beschreibung:

$$v_n := \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}\,,\quad (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathbb{R}^2\,,$$

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,,\quad \forall_{n\in\mathbb{N}}\ v_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+1} + a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A \in M_2(\mathbb{R})} v_n$$

Hieraus folgt

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = v_n = A^n v_0 = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Eigenwerte von A:

$$P_A = \det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - t - 1\,,$$

Nullstellen: $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\,,$

also Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1{,}618$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \approx -0{,}618$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1\,,\quad \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}\,,\quad \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

$$\mathrm{Eig}_{\lambda_1}(A) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & \underbrace{1-\lambda_1}_{\lambda_2} \end{pmatrix} = \mathbb{R}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}}_{=:w_1}$$

$$\mathrm{Eig}_{\lambda_2}(A) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ 1 & \underbrace{1-\lambda_2}_{\lambda_1} \end{pmatrix} = \mathbb{R}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}}_{=:w_2}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = C\,A\,C^{-1} \quad \text{mit} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(C^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} C\right)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\begin{pmatrix} -\lambda_1^n \\ \lambda_2^n \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\lambda_1^n + \lambda_2^n \\ * \end{pmatrix},$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^n - \lambda_2^n\right) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{=:b_n} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{=:c_n}}$$

$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, $\forall_{n\geq 1} |c_n| < 0{,}3$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert so schnell gegen $+\infty$ wie $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$,

genauer gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\lambda_1^n} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Für große n gilt ziemlich genau: $a_n \approx b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_1^n$

z.B. $a_{39} \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{39} \approx 63\,245\,986$

($\approx$: Taschenrechner; genauer Wert von a_{39})

23.5.03
(10.)

7.41 Lemma

Seien V ein n-dim. K-Vektorraum und $g \in End(V)$. Offenbar gilt:

$$\{0\} \subset \underbrace{Kern(g^0)}_{= id_V} \subset Kern(g) \subset Kern(g^2) \subset Kern(g^3) \subset \ldots \subset V,$$

also existiert (wegen $\dim V = n$) ein $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, mit

$$Kern(g^k) = Kern(g^{k+1})$$

Für jedes solche k gilt:

(i) $\forall_{\ell > k} \quad Kern(g^k) = Kern(g^\ell)$,

(ii) $V = Kern(g^k) \oplus Bild(g^k)$.

Beweis: Zu (i): Offenbar genügt es zu zeigen, daß

$$\forall_{r \in \mathbb{N}} \left(Kern(g^r) = Kern(g^{r+1}) \Rightarrow Kern(g^{r+1}) = Kern(g^{r+2}) \right).$$

Beweis hiervon: Sei also $r \in \mathbb{N}$ und gelte $Kern(g^r) = Kern(g^{r+1})$.

$Kern(g^{r+1}) \subset Kern(g^{r+2})$ ist klar (s.o.) Zum Beweis von „$\supset$":

Sei $v \in Kern(g^{r+2})$. Dann folgt $0 = g^{r+2}(v) = g^{r+1}(g(v))$,

also $g(v) \in Kern(g^{r+1}) = Kern(g^r)$, also $g^{r+1}(v) = g^r(g(v)) = 0$,

d.h. $v \in Kern(g^{r+1})$.

Zu (ii): Sei $v \in Kern(g^k) \cap Bild(g^k)$. Dann gilt $g^k(v) = 0$

und es existiert $w \in V$ mit $v = g^k(w)$. Wegen

$g^{2k}(w) = g^k(g^k(w)) = g^k(v) = 0$ folgt $w \in Kern(g^{2k}) \underset{(i)}{=} Kern(g^k)$,

also $v = g^k(w) = 0$. Damit ist gezeigt:

$$\mathrm{Kern}(g^k) \cap \mathrm{Bild}(g^k) = \{0\}.$$

Hieraus folgt:

$$\dim\left(\mathrm{Kern}(g^k) + \mathrm{Bild}(g^k)\right) \underset{4.21}{=} \dim\left(\mathrm{Kern}(g^k)\right) + \dim\left(\mathrm{Bild}(g^k)\right) - \underbrace{\dim\left(\mathrm{Kern}(g^k) \cap \mathrm{Bild}(g^k)\right)}_{=0}$$

$$\underset{4.22}{=} \dim V,$$

also

$$\mathrm{Kern}(g^k) + \mathrm{Bild}(g^k) = V, \qquad \text{q.e.d.}$$

7.42 **Def.:** Seien V ein n-dim. K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f.

Wir haben bereits definiert (s. 7.1):

$$\mathrm{Eig}_\lambda(f) = \mathrm{Kern}(f - \lambda\,\mathrm{id}) \quad \text{„Eigenraum zum Eigenwert } \lambda \text{ von } f\text{“}$$

mit

$$\dim \mathrm{Eig}_\lambda(f) = \text{geometrische Vielfachheit des Eigenwerts } \lambda \text{ von } f \geq 1$$

(i) Wir definieren jetzt neu:

$$\boxed{\mathrm{Han}_\lambda(f)} := \{v \in V \mid \exists_{k \in \mathbb{N}_+} (f - \lambda\,\mathrm{id})^k(v) = 0\}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{Kern}(f - \lambda\,\mathrm{id})^k \underset{7.41}{=} \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{Kern}(f - \lambda\,\mathrm{id})^k$$

$$\underset{7.41}{=} \mathrm{Kern}(f - \lambda\,\mathrm{id})^n \supset \mathrm{Eig}_\lambda(f)$$

$\mathrm{Han}_\lambda(f)$ ist ein Untervektorraum von V und heißt der

Hauptraum von f zum Eigenwert λ

(auch: „verallgemeinerter Eigenraum“)

Wir werden später sehen, daß gilt: „Vielfachheit der Nullstelle λ von P_f"

$$\dim \mathrm{Ham}_\lambda(f) = \text{algebraische Vielfachheit des Eigenwerts } \lambda \text{ von } f \quad \left(= \overbrace{\mu(P_f, \lambda)}^{\text{7.16}}\right)$$

(iii) Die kleinste Zahl $\boxed{k_\lambda} \in \mathbb{N}_+$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{Ham}_\lambda(f) = \mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{id})^{k_\lambda}$$

heißt der Index des Eigenwerts λ von f.

7.43 Lemma Seien V ein n-dim. K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. $\lambda \in K$ sei ein Eigenwert von f und $k \in \mathbb{N}_+$ sei so gewählt, daß

$$\mathrm{Ham}_\lambda(f) = \mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{id})^k,$$

(d.h. $k \geq k_\lambda$). Dann folgt

$$V = \mathrm{Ham}_\lambda(f) \oplus \mathrm{Bild}(f - \lambda \mathrm{id})^k$$

direkte Summe von f-invarianten Untervektorräumen

Beweis: Nach 7.42, 7.41 gilt $\underbrace{\mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{id})^k}_{\mathrm{Ham}_\lambda(f)} = \mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{id})^{k+1}$

und

$$V = \mathrm{Ham}_\lambda(f) \oplus \mathrm{Bild}(f - \lambda \mathrm{id})^k.$$

Beweis, daß $\mathrm{Ham}_\lambda(f)$ f-invariant: Sei $v \in \mathrm{Ham}_\lambda(f)$, d.h. $(f - \lambda \mathrm{id})^k(v) = 0$. Dann folgt

$$\underbrace{(f - \lambda \mathrm{id})^k}_{\text{vertauschen miteinander}} f(v) = f\underbrace{(f - \lambda \mathrm{id})^k(v)}_{=0} = f(0) = 0,$$

d.h. $f(v) \in \mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{id})^k = \mathrm{Ham}_\lambda(f)$

Beweis, daß $\mathrm{Bild}(f - \lambda \mathrm{id})^k$ f-invariant: Sei $v \in \mathrm{Bild}(f - \lambda \mathrm{id})^k$.

Es existiert also ein $w \in V$ mit $v = (f - \lambda \mathrm{id})^k(w)$ und es folgt

$$f(v) = \underbrace{f}\,\underbrace{(f-\lambda id)^k}(w) = (f-\lambda id)^k f(w) \in \text{Bild}(f-\lambda id)^k,$$

q.e.d.

7.44 Lemma Seien V ein n-dim. K-Vektorraum und $f \in \text{End}(V)$ und seien $\lambda, \mu \in K$ zwei voneinander verschiedene Eigenwerte von f. Dann folgt

$$\text{Hau}_\lambda(f) \cap \text{Hau}_\mu(f) = \{0\}.$$

Beweis: Angenommen die Beh. ist falsch. Dann ist $W := \text{Hau}_\lambda(f) \cap \text{Hau}_\mu(f)$ ein mindestens 1-dimensionaler Unterraum von V. Nach 7.43 sind $\text{Hau}_\lambda(f)$ und $\text{Hau}_\mu(f)$ f-invariant, also ist auch W f-invariant. W ist dann auch $(f-\lambda id)$-invariant und $(f-\mu id)$-invariant, also

$$g_\lambda := (f-\lambda id)|W \;,\; g_\mu := (f-\mu id)|W \in \text{End}(W).$$

g_λ und g_μ sind nilpotent, (denn z.B. gilt $g_\lambda^{k_\lambda} = 0 \in \text{End}(W)$ wegen $W \subset \text{Hau}_\lambda(f) = \text{Kern}(f-\lambda id)^{k_\lambda}$). Als nilpotenter Endomorphismus von $\underbrace{W}_{\neq\{0\}}$ besitzt g_λ den Eigenwert $0 \in K$. (Denn andernfalls wäre $g_\lambda : W \to W$ injektiv, d.h. bijektiv, also auch jede Potenz $g_\lambda^m : W \to W$ bijektiv im Widerspruch zur Nilpotenz von g_λ). Wegen

$$g_\mu = g_\lambda + (\lambda-\mu) id_W$$

ist dann $\lambda-\mu \in K-\{0\}$ Eigenwert von g_μ. Als nilpotenter Endomorphismus kann g_μ aber keinen Eigenwert $\neq 0$ besitzen. (Denn ist $g \in \text{End}(W)$ nilpotent und hat $\alpha \in K-\{0\}$ als Eigenwert, so existiert $w \in W-\{0\}$ mit $g(w) = \alpha w$, also $g^m(w) = \underbrace{\alpha^m}_{\neq 0}\,\underbrace{w}_{\neq 0} \neq 0$ für alle m ein Widerspruch zur Nilpotenz von g.) Widerspruch! q.e.d.

7.45 **Lemma** Seien V ein n-dim. K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda, \mu \in K$ zwei voneinander verschiedene Eigenwerte von f. Dann folgt:

$$\mathrm{Ham}_\mu(f) \subset \mathrm{Bild}(f - \lambda \mathrm{id})^{k_\lambda},$$

(wobei k_λ = der Index des Eigenwerts λ von f, vgl. 7.42(ii)).

Beweis: Sei $v \in \mathrm{Ham}_\mu(f)$. Nach 7.43 gilt

$$v = v_1 + v_2 \quad \text{mit} \quad v_1 \in \mathrm{Ham}_\lambda(f), \quad v_2 \in \mathrm{Bild}(f - \lambda \mathrm{id})^{k_\lambda}.$$

Es genügt also zu zeigen, daß $v_1 = 0$.
Nach 7.43 sind $\mathrm{Ham}_\lambda(f)$ und $\mathrm{Bild}(f-\lambda \mathrm{id})^{k_\lambda}$ f-invariant, also auch $(f-\mu \mathrm{id})^{k_\mu}$-invariant, (wobei k_μ = der Index des Eigenwerts μ von f),

folglich

$$\underset{\uparrow}{0} \underset{v \in \mathrm{Ham}_\mu(f)}{=} (f-\mu \mathrm{id})^{k_\mu}(v) = \underbrace{(f-\mu \mathrm{id})^{k_\mu}(v_1)}_{\in \mathrm{Ham}_\lambda(f)} + \underbrace{(f-\mu \mathrm{id})^{k_\mu}(v_2)}_{\in \mathrm{Bild}(f-\lambda \mathrm{id})^{k_\lambda}}$$

Hieraus folgt, da nach 7.43

$$V = \mathrm{Ham}_\lambda(f) \oplus \mathrm{Bild}(f-\lambda \mathrm{id})^{k_\lambda},$$

daß $(f-\mu \mathrm{id})^{k_\mu}(v_1) = 0$, d.h. $v_1 \in \mathrm{Ham}_\mu(f)$, also

$v_1 \in \mathrm{Ham}_\lambda(f) \cap \mathrm{Ham}_\mu(f) \underset{7.44}{=} \{0\}$ und daher $v_1 = 0$,

q.e.d.

7.46 Satz

Seien V ein n-dim. K-Vektorraum und $f \in End(V)$ und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ alle voneinander verschiedenen Eigenwerte von f, wobei $r \in \mathbb{N}_+$. Sei

$$W := Hau_{\lambda_1}(f) + \dots + Hau_{\lambda_r}(f).$$

Dann folgt

$$W = Hau_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus Hau_{\lambda_r}(f).$$

Beweis: Sei $0 = v_1 + \dots + v_r$ mit $v_i \in Hau_{\lambda_i}(f)$ für $i = 1, \dots, r$. Zu zeigen ist, daß alle $v_i = 0$. Aus

$$\underbrace{v_2 + \dots + v_r}_{\in Bild(f-\lambda_1 id)^{k_{\lambda_1}} \text{ (7.45)}} = -v_1 \in Hau_{\lambda_1}(f) \cap Bild(f-\lambda_1 id)^{k_{\lambda_1}} \overset{7.43}{=} \{0\}$$

folgt zunächst $v_1 = 0$, also $0 = v_2 + \dots + v_r$. Sodann folgt analog

$$v_3 + \dots + v_r = -v_2 \in Hau_{\lambda_2}(f) \cap Bild(f-\lambda_2 id)^{k_{\lambda_2}} = \{0\},$$

also $v_2 = 0$ usw.

Schließlich folgt

$$v_r = -v_{r-1} = 0 \quad , \text{ q.e.d.}$$

7.47 Satz

Seien V ein n-dim. K-Vektorraum und $f \in End(V)$. $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ seien alle voneinander verschiedenen Eigenwerte von f und das charakteristische Polynom P_f von f zerfalle in Linearfaktoren,
(also $P_f = (-1)^n (t-\lambda_1)^{\ell_1} \cdot \dots \cdot (t-\lambda_r)^{\ell_r}$ mit $\ell_i \in \mathbb{N}_+$ für $i = 1, \dots, r$).
Dann folgt:

$$V = Hau_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus Hau_{\lambda_r}(f).$$

Beweis: Wegen 7.46 bleibt nur noch zu zeigen, daß

$$V \overset{\uparrow}{=} \operatorname{Hau}_{\lambda_1}(f) + \ldots + \operatorname{Hau}_{\lambda_r}(f)$$

d.h. „$\subset$" („$\supset$" ist klar)

Beweis durch vollständige Induktion über $n = \dim V \in \mathbb{N}_+$:

Für $n = 1$ ist der Satz trivial.

Angenommen $n \in \mathbb{N}_+$, $n \geq 2$ und der Satz ist für $\dim V < n$ bewiesen.

Seien nun V, f wie im Satz, also $\dim V = n$. Nach 7.43 gilt

$$V = \operatorname{Hau}_{\lambda_1}(f) \oplus \underbrace{\operatorname{Bild}(f - \lambda_1 \mathrm{id})^{k_{\lambda_1}}}_{=: U}$$

und U ist ein f-invarianter Untervektorraum von V,

also $\dim U < n = \dim V$ und $f|U \in \operatorname{End}(U)$

Im Falle $U = \{0\}$ gilt $V = \operatorname{Hau}_{\lambda_1}(f)$ und die Beh. ist gezeigt.

Im folgenden nehmen wir daher an, daß $\dim U \in \mathbb{N}_+$.

Nach 7.25 ist $P_{f|U}$ ein Teiler von P_f in $K[t]$.

Dann folgt aus Üg 1, daß mit P_f auch $P_{f|U}$ in Linearfaktoren zerfällt und daß alle Eigenwerte von $f|U$ auch Eigenwerte von f sind.

Seien $\mu_1, \ldots, \mu_s$ die voneinander verschiedenen Eigenwerte von $f|U$, also $\{\mu_1, \ldots, \mu_s\} \subset \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Wir können die Induktionsvoraussetzung auf U und $f|U \in \operatorname{End}(U)$ anwenden und es folgt

$$U = \operatorname{Hau}_{\mu_1}(f|U) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Hau}_{\mu_s}(f|U).$$

Es gilt

$$\operatorname{Hau}_{\mu_j}(f|U) \overset{n \geq \dim U}{=} \operatorname{Kern}((f|U) - \mu_j \mathrm{id}_U)^n$$
$$\subset \operatorname{Kern}(f - \mu_j \mathrm{id}_V)^n = \operatorname{Hau}_{\mu_j}(f)$$

für $j = 1, \ldots, s$, also folgt weiter

$$V = Ham_{\lambda_1}(f) \oplus U$$

$$= Ham_{\lambda_1}(f) \oplus Ham_{\mu_1}(f|U) \oplus \dots \oplus Ham_{\mu_s}(f|U)$$

$$\subset Ham_{\lambda_1}(f) + Ham_{\mu_1}(f) + \dots + Ham_{\mu_s}(f)$$

$$\subset Ham_{\lambda_1}(f) + Ham_{\lambda_2}(f) + \dots + Ham_{\lambda_r}(f),$$

$\{\mu_1, \dots, \mu_s\} \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$

q.e.d.

Bemerkung Der letzte Satz 7.47 heißt in der Lehrbuchliteratur oft „1. Zerlegungssatz", der Zerlegungssatz 7.37 für nilpotente Endomorphismen heißt dann „2. Zerlegungssatz".

7.48 **Def.:** (Jordansche Normalform)

Sei $A \in M_n(K)$.

A besitzt per def. Jordansche Normalform, wenn voneinander verschiedene $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ existieren derart, daß

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_m \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \} s_1 \\ \} s_2 \\ \vdots \\ \} s_m \end{matrix} \Big\} n$$

wobei $B_i \in M_{s_i}(K)$ von der Gestalt

$J(\lambda_i, k_{i1})$ „Jordan-Block"

$$B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \lambda_i & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \} k_{i1} \\ \} k_{i2} \\ \vdots \\ \} k_{i r_i} \end{matrix} \Big\} s_i$$

mit $k_{i1} \geq k_{i2} \geq \dots > k_{i r_i} \geq 1$

Also insbes.: A ist „fast" eine Diagonalmatrix: Die einzig möglichen von Null verschiedenen Matrixelemente außerhalb der Hauptdiagonale sind Einsen auf der Diagonale direkt unterhalb der Hauptdiagonale.

7.49 Satz (Satz von der Jordanschen Normalform)

Sei V ein n-dim. K-Vektorraum (K bel. Körper) und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Das charakteristische Polynom P_f von f zerfalle in Linearfaktoren.

Dann gilt: Es existiert eine geordnete Basis $\mathcal{A}$ von V derart, daß die Matrix $A = M_{\mathcal{A}}(f)$ von f bzgl. $\mathcal{A}$ Jordansche Normalform besitzt. A ist eindeutig bestimmt bis auf Vertauschung der Reihenfolge der Teilmatrizen B_i, die den verschiedenen Eigenwerten λ_i entsprechen.

Zusatz (und Beweis): Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die voneinander verschiedenen Eigenwerte von f. Nach dem „1. Zerlegungssatz" 7.47 gilt

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m \quad \text{mit} \quad V_i = \mathrm{Hau}_{\lambda_i}(f).$$

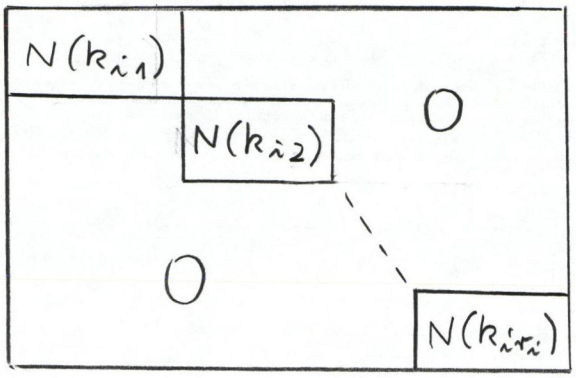
Nach 7.43 ist jedes V_i f-invariant. Sei $f_i := f|V_i \in \mathrm{End}(V_i)$.

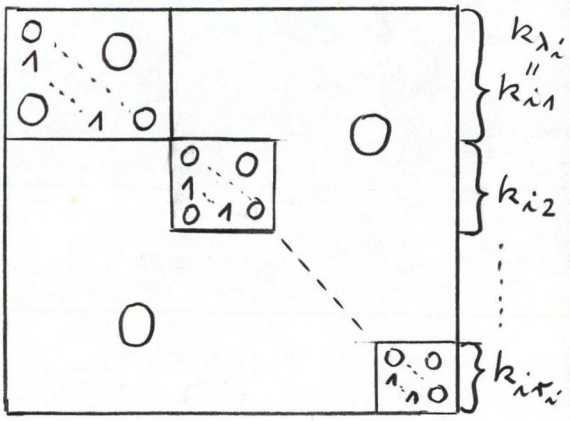
Nach 7.42 ist offenbar

$$g_i := f_i - \lambda_i \mathrm{id}_{V_i} \in \mathrm{End}(V_i) \text{ nilpotent vom Index } k_{\lambda_i}.$$

Sei $s_i := \dim V_i \in \mathbb{N}_+$. Nach 7.38 (= Folgerung aus dem „2. Zerlegungssatz" 7.37) existiert eine geordnete Basis $\mathcal{A}_i = (v_{i1}, \dots, v_{is_i})$ von V_i derart, daß die Matrix $N_i := M_{\mathcal{A}_i}(g_i) \in M_{s_i}(K)$ von g_i bzgl. $\mathcal{A}_i$ die folgende Gestalt hat, wobei

$$k_{\lambda_i} = k_{i1} \geq k_{i2} \geq \dots \geq k_{is_i}:$$

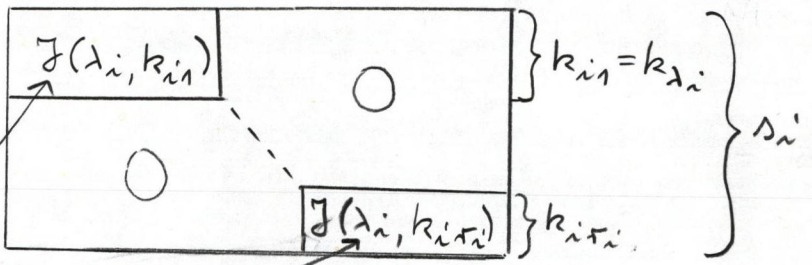
$N_i =$ 

$=$ 

Für die Anzahl der „Nilpotenzblöcke" $N(j)$ unter den $N(k_{i1}), N(k_{i2}), \ldots, N(k_{i r_i})$ gilt die Formel im Zusatz zu 7.38.

Wegen $f_i = \underbrace{(f_i - \lambda_i id_{V_i})}_{g_i} + \lambda_i id_{V_i}$ ist dann die Matrix

$M_{\mathcal{A}_i}(f_i) \in M_{s_i}(K)$ von f_i bzgl. $\mathcal{A}_i$ gleich

$B_i := N_i + \lambda_i E_{s_i} =$ 

Dann ist

$$\mathcal{A} := (v_{11}, \ldots, v_{1s_1}, v_{21}, \ldots, v_{2s_2}, \ldots\ldots, v_{m1}, \ldots, v_{ms_m})$$

eine geordnete Basis von V und es gilt

$$A := M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \} s_1 \\ \\ \} s_m \end{matrix}$$

Ferner gilt

$$P_f = P_A = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - t & & \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_m - t \end{pmatrix} \begin{matrix} \} s_1 \\ \\ \} s_m \end{matrix}$$

$$= (-1)^n (t-\lambda_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_m)^{s_m},$$

also folgt für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$:

algebraische Vielfachheit von λ_i

$= s_i$ = Anzahl der Zeilen und Spalten von B_i

$= \dim \underbrace{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}(f)}_{V_i}$

Ferner

geometrische Vielfachheit von $\lambda_i = \dim \mathrm{Kern}\underbrace{(f - \lambda_i \cdot \mathrm{id})}_{= g_i}$

$= s_i - \underbrace{\dim \mathrm{Bild}(g_i)}_{= \mathrm{Rang}\, N_i = s_i - r_i}$

Die r_i Spalten mit den Nummern $k_{i1}, k_{i1}+k_{i2}, \dots, k_{i1}+\dots+k_{ir_i} = s_i$ sind Null, die übrigen Spalten sind linear unabh. (vgl. vorige Seite rechts oben)

$= r_i$ = Anzahl der Jordanblöcke von B_i

30.5.03

(12) Die Matrizen B_i sind eindeutig bestimmt, denn die Matrizen N_i sind nach 7.38 eindeutig bestimmt. Deshalb ist auch A eindeutig bestimmt bis auf eine Vertauschung der B_i.

A heißt „die" Jordansche Normalform von f

Bemerkung In der Lehrbuchliteratur wird alternativ oft auch eine Matrix $A \in M_n(K)$ als Matrix in Jordanscher Normalform" bezeichnet, wenn die transponierte Matrix $A^t \in M_n(K)$ im Sinne dieser Vorlesung in Jordanscher Normalform ist.

Mittels ü 75 (mit Lösung) folgt leicht: Ist A die Matrix von f bzgl. einer orientierten Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ von V, so läßt sich explizit eine Permutation $\sigma \in S_n$ angeben derart, daß A^t die Matrix von f bzgl. $\tilde{\mathcal{A}} := (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$ ist.

7.50 Beispiel

$$A := \begin{pmatrix} 10 & -5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Wir wollen eine geordnete Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_4)$ von $\mathbb{R}^4$ finden derart, daß $M_{\mathcal{A}}(\Phi_A)$ Jordansche Normalform besitzt.

Wegen

$$M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(\Phi_A) = \underbrace{M_{\varepsilon_4 \mathcal{A}}(id_{\mathbb{R}^4})}_{=} \underbrace{M_{\varepsilon_4 \varepsilon_4}(\Phi_A)}_{=} \underbrace{M_{\mathcal{A}\varepsilon_4}(id_{\mathbb{R}^4})}_{=}$$

$$M_{\mathcal{A}\varepsilon_4}(id_{\mathbb{R}^4}) = T^{-1} \qquad A \qquad \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = T$$

ist diese Aufgabe äquivalent dazu, eine Matrix $T \in GL(4, \mathbb{R})$ zu finden derart, daß $T^{-1} A T$ Jordansche Normalform besitzt.

1.) $P_A = P_{\Phi_A} = \det(A - tE_4) = \begin{vmatrix} 10-t & -5 & 9 & 7 \\ 0 & 3-t & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -2-t & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5-t \end{vmatrix}$

$$\overset{\text{Entw. 4. Zeile}}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 10-t & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \\ -4 & -2-t & -6 \end{vmatrix}}_{\text{Entw. 2. Zeile}} + (5-t) \underbrace{\begin{vmatrix} 10-t & -5 & 9 \\ 0 & 3-t & 0 \\ -4 & 2 & -2-t \end{vmatrix}}_{\text{Entw. 2. Zeile}}$$

$$\underbrace{-(-1)}_{=1} \begin{vmatrix} 10-t & 9 \\ -4 & -2-t \end{vmatrix} \qquad (3-t) \begin{vmatrix} 10-t & 9 \\ -4 & -2-t \end{vmatrix}$$

$$= t^2 - 10t + 2t - 20 + 36 \qquad = \text{s.o.} = (3-t)(t-4)^2$$

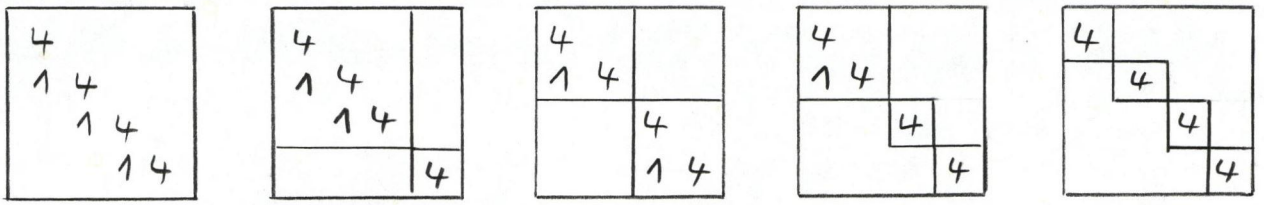
$$= t^2 - 8t + 16 = (t-4)^2$$

$$= (t-4)^2 \left(1 + (5-t)(3-t)\right) = (t-4)^2 \underbrace{(1 + t^2 - 5t - 3t + 15)}_{t^2 - 8t + 16}$$

$$= (t-4)^4$$

Damit insbes. gezeigt: P_f zerfällt in Linearfaktoren, also Satz über Jordansche Normalform anwendbar, $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Hau}_4(\Phi_A)$ und die Jordansche Normalform B von $\underbrace{A}_{(\text{d.h. } \Phi_A)}$ ist eindeutig bestimmt.

Als Jordansche Normalform B also noch möglich:



2.) $g := \Phi_A - 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4} = \Phi_{A-4E_4}$

$$A - 4E_4 = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 9 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeilenumformungen, die den Rang nicht ändern:

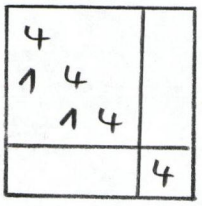
1. Zeile : + 3. Zeile	2	-3	3	1
2. Zeile : + 4. Zeile	0	0	0	0
	-4	2	-6	-6
	0	1	0	1
	2	-3	3	1
	0	0	0	0
3. Zeile : + 2 × 1. Zeile	0	-4	0	-4
	0	1	0	1
	2	-3	3	1
	0	0	0	0
3. Zeile : + 4 × 4. Zeile	0	0	0	0
	0	1	0	1

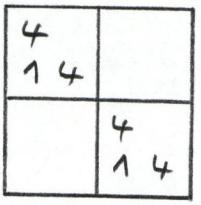
Damit klar, daß $\mathrm{Rang}(A-4E_4) = 2$, d.h. $\mathrm{Rang}(g) = 2$, also

$r :=$ geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 4 von Φ_A $= \dim \mathrm{Kern}(g) = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{Rang}(g) = 4 - 2 = 2$

$=$ Anzahl der Jordanblöcke in der Jordanschen Normalform B

Noch mögliche Jordansche Normalformen B:





Man rechnet aus:

$$(A-4E_4)^2 = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 9 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 9 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\| \; M_{E_4}(g^2)$$

also $g^2 = 0$, $g \neq 0$, d.h. g nilpotent vom Index $k_4 = 2$.
Daher ist der größte Jordanblock in der Jordanschen Normalform B eine (2x2)-Matrix, also folgt

$$B = \begin{array}{|cc|cc|} \hline 4 & & & \\ 1 & 4 & & \\ \hline & & 4 & \\ & & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

[In weniger einfachen Fällen, d.h. bei größeren Matrizen, muß man Satz 7.38 heranziehen, um die Größe der Jordanblöcke in B zu berechnen. Man schließt dann so:

$$r_0 = \operatorname{Rang}(\underbrace{g^0}_{id_{\mathbb{R}^4}}) = 4,$$

$$r_1 = \operatorname{Rang}(g) = 2,$$

$$r_2 = \operatorname{Rang}(\underbrace{g^2}_{=0}) = 0, \text{ also auch } r_3 = r_4 = 0.$$

$$a_1 = r_2 - 2r_1 + r_0 = 0 - 4 + 4 = 0,$$

$$a_2 = r_3 - 2r_2 + r_1 = 0 - 0 + 2 = 2,$$

$$a_3 = a_4 = 0.$$

Daher besitzt B zwei (2x2)-Matrizen als Jordanblöcke.]

Wenn nur nach der Jordanschen Normalform von A gefragt wäre, wäre die Aufgabe gelöst. Aber wir müssen auch noch eine Transformationsmatrix T berechnen.

3.) Wir wenden Satz 7.36 an, um $\mathcal{A} = (v_1, \dots v_4)$ mit $M_{\mathcal{A}}(\Phi_A) = B$ zu bestimmen.

Wegen $g(e_1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ und $\underbrace{g^2(e_1)}_{=0} = 0$ können wir

$$v_1 := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 := g(v_1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wählen.

Um zu $W := \operatorname{Spann}\{v_1, v_2\}$ einen weiteren g-invarianten Untervektorraum U von $\mathbb{R}^4$ mit $\mathbb{R}^4 = W \oplus U$ zu finden, verfahren wir wie im Zusatz zu 7.36.

$H := \operatorname{Spann}\{e_2, e_3, e_4\}$ ist ein 3-dim. Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ mit $g(v_1) \notin H$. Sei also

$$U := \{u \in \mathbb{R}^4 \mid u \in H \text{ und } g(u) \in H\},$$

also

$$\forall_{u = \sum_{i=1}^{4} \beta_i e_i \in \mathbb{R}^4} \Big(u \in U \iff \beta_1 = 0 \wedge \underbrace{g_1(u)}_{\substack{\text{1. Komponente} \\ \text{von } g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{4} \beta_i g_1(e_i)}_{\substack{6\beta_1 - 5\beta_2 \\ +9\beta_3 + 7\beta_4}} = 0$$

$$\iff \beta_1 = 0 \wedge 5\beta_2 = 9\beta_3 + 7\beta_4 \Big)$$

Deshalb können wir wählen:

$$v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in U, \quad v_4 := g(v_3) = 7g(e_2) + 5g(e_4)$$

$$= 7\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix} \in U \setminus \{0\}$$

Dann haben

$$\mathcal{A} := (v_1, v_2, v_3, v_4)$$

und

$$T := \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -12 \\ 0 & -4 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

alle gewünschten Eigenschaften, q.e.d.

7.51 Satz (Kanonische Summenzerlegung eines Endomorphismus in einen diagonalisierbaren und nilpotenten Anteil)

Sei V ein n-dim. K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Das charakteristische Polynom P_f von f zerfalle in Linearfaktoren. Dann existieren $g, h \in \mathrm{End}(V)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$f = g + h \qquad (1)$$

g ist diagonalisierbar (2)

h ist nilpotent (3)

$$g\,h = h\,g \qquad (4)$$

[Darüber hinaus gilt: g und h mit (1) bis (4) sind eindeutig bestimmt.] hierfür kein Beweis in dieser Vorlesung

Beweis: Nach 7.49 existiert eine geordnete Basis $\mathcal{A}$ von V derart, daß $A := M_{\mathcal{A}}(f) \in M_n(K)$ Jordansche Normalform besitzt. Es existieren eindeutig bestimmte $D, N \in M_n(K)$ mit $A = D + N$ derart, daß D Diagonalmatrix und N eine nilpotente Matrix, die als von Null verschiedene Matrixelemente höchstens Einsen direkt unterhalb der Hauptdiagonalen besitzt:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \lambda_1 \\ \vdots \\ \} \lambda_m \end{matrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Seien $g, h \in \mathrm{End}(V)$ die eindeutig bestimmten Endomorphismen mit $M_{\mathcal{A}}(g) = D$ und $M_{\mathcal{A}}(h) = N$. Dann gelten offenbar (1) bis (4). Dabei folgt (4) daraus, daß in $M_{k,l}(K)$ stets

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \lambda_i & \ddots & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix},$$

q.e.d.

7.52 Satz

Seien V ein n-dim. K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$.
$\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ seien alle voneinander verschiedenen Eigenwerte von f und P_f zerfalle in Linearfaktoren.
Dann gilt für das Minimalpolynom m_f von f:

$$m_f = (t-\lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (t-\lambda_r)^{k_r},$$

wobei $k_i := k_{\lambda_i} \in \mathbb{N}_+$ der Index des Eigenwerts λ_i von f ist für $i = 1, \dots, r$

Beweis: Nach Vor. ist P_f von der Gestalt

$$P_f = (-1)^n (t-\lambda_1)^{\ell_1} \cdot \dots \cdot (t-\lambda_r)^{\ell_r} \quad \text{mit } \ell_1, \dots, \ell_r \in \mathbb{N}_+.$$

Nach 7.30, Folgerung 1) ist m_f ein Teiler von P_f, also nach ü 9 1

$$m_f = (t-\lambda_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (t-\lambda_r)^{s_r} \quad \text{mit } 0 \le s_i \le \ell_i \text{ für } i = 1, \dots, r. \qquad (1)$$

Wir definieren

$$h := (t-\lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (t-\lambda_r)^{k_r} \qquad (2)$$

und haben zu zeigen, daß $m_f = h$.
Dafür genügt es zu zeigen, daß

$$s_i = k_i \text{ für } i = 1, \dots, r.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\forall_{i \in \{1,\dots,r\}} \quad g_i := f - \lambda_i \mathrm{id} \in \mathrm{End}(V).$$

Dann gilt offenbar

$$\forall_{i,j \in \{1,\dots,r\}} \quad g_i g_j = g_j g_i, \qquad (3)$$

ferner

$$\forall_{j \in \{1,\dots,r\}} \quad g_j(\mathrm{Hau}_{\lambda_j}(f)) \subset \mathrm{Hau}_{\lambda_j}(f) \qquad (4)$$

und

$$\forall_{\substack{i,j\in\{1,\dots,r\}\\ i\neq j}} \quad g_i\left(\mathrm{Hau}_{\lambda_j}(f)-\{0\}\right) \subset \mathrm{Hau}_{\lambda_j}(f)-\{0\}. \qquad (5)$$

[Zu (4),(5): $\mathrm{Hau}_{\lambda_j}(f)$ ist (nach 7.43) f-invariant, also auch g_i-invariant. Angenommen $i\neq j$ und es existiert $v\in \mathrm{Hau}_{\lambda_j}(f)-\{0\}$ mit $g_i(v)=0$, d.h. $(f-\lambda_i\,\mathrm{id})(v)=0$. Dann folgt $v\in \mathrm{Hau}_{\lambda_j}(f)\cap \mathrm{Hau}_{\lambda_i}(f) \underset{7.44}{=} \{0\}$, also $v=0$ im Widerspruch zu $v\neq 0$.]

Wir zeigen als nächstes:

$$h(f) = 0. \qquad (6)$$

[Zu (6): Sei $v\in V$. Nach 7.47 gilt

$$v = v_1+\dots+v_r \quad \text{mit} \quad v_i\in \mathrm{Hau}_{\lambda_i}(f) \overset{7.42(ii)}{=} \mathrm{Kern}\, g_i^{k_i} \quad \text{für } i=1,\dots,r$$

und es folgt

$$\begin{aligned} h(f)(v) &\underset{(2)}{=} (f-\lambda_1\,\mathrm{id})^{k_1}\circ\dots\circ(f-\lambda_r\,\mathrm{id})^{k_r}\Big(\sum_{i=1}^{r} v_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{r} g_1^{k_1}\circ\dots\circ g_r^{k_r}(v_i) \\ &\underset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{r} g_1^{k_1}\circ\dots\circ \hat{g}_i^{k_i}\circ\dots\circ g_r^{k_r}\underbrace{g_i^{k_i}(v_i)}_{=0} = 0.] \end{aligned}$$

Wegen $\varphi_f(h) = h(f) \underset{(6)}{=} 0$ gilt $h\in \mathrm{Kern}\,\varphi_f \underset{7.29(ii)}{=} m_f K[t]$, also ist m_f ein Teiler von h, folglich nach §1, (1) und (2):

$$s_i \le k_i \quad \text{für } i=1,\dots,r.$$

Zu zeigen bleibt daher, daß für kein $i\in\{1,\dots,r\}$ $s_i < k_i$ gilt.

Beweis hiervon indirekt. Angenommen es existiert

$$j \in \{1, \dots, r\} \text{ mit } s_j < k_j .$$

Wegen

$$\operatorname{Kern}(f-\lambda_j \mathrm{id})^{s_j} \subset \dots \subset \operatorname{Kern}(f-\lambda_j \mathrm{id})^{k_j-1} \overset{\subsetneq}{\underset{\neq}{\subset}} \underbrace{\operatorname{Kern}(f-\lambda_j \mathrm{id})^{k_j}}_{= \operatorname{Hau}_{\lambda_j}(f)}$$

(nach Def. von $k_j = k_{\lambda_j}$)

existiert ein

$$v \in \operatorname{Hau}_{\lambda_j}(f) \text{ mit } v \notin \operatorname{Kern}(f-\lambda_j \mathrm{id})^{s_j}, \text{ d.h. } \underbrace{g_j^{s_j}(v)}_{\in \operatorname{Hau}_{\lambda_j}(f) \text{ nach (4)}} \neq 0,$$

und es folgt

$$0 = \underbrace{m_f(f)(v)}_{=0} \underset{(1)}{=} (f-\lambda_1 \mathrm{id})^{s_1} \circ \dots \circ (f-\lambda_r \mathrm{id})^{s_r}(v)$$

$$= g_1^{s_1} \circ \dots \circ g_r^{s_r}(v) \underset{(3)}{=} \underbrace{g_1^{s_1} \circ \dots \circ \hat{g}_j^{s_j} \circ \dots \circ g_r^{s_r}}_{\operatorname{Hau}_{\lambda_j}(f)\setminus\{0\} \to \operatorname{Hau}_{\lambda_j}(f)\setminus\{0\} \text{ nach (5)}} \underbrace{\left(g_j^{s_j}(v)\right)}_{\in \operatorname{Hau}_{\lambda_j}(f)\setminus\{0\}}$$

$$\neq 0 ,$$

also ein Widerspruch, q.e.d.

§ 8 Euklidische und unitäre Vektorräume

Generalvoraussetzung für §8:

$$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}.$$

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ bezeichnet $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ die zu λ konjugiert komplexe Zahl, also $\bar{\lambda} = \lambda$ für $\lambda \in \mathbb{R} (\subset \mathbb{C})$.

8.1 Def.: (i) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

derart, daß für alle $v, v_1, v_2, w \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(S1) $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$

(S2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$

} „linear im 1. Argument"

(S3) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

(S4) $\langle v, v \rangle > 0$, falls $v \neq 0$ „positiv definit"

(ii) Ein Paar $(V, \langle\ \rangle)$, bestehend aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und einem Skalarprodukt auf V heißt ein euklidischer Vektorraum.

Ein Paar $(V, \langle\ \rangle)$, bestehend aus einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V und einem Skalarprodukt auf V heißt ein unitärer Vektorraum

Bemerkungen 1.) (S1) und (S2) zusammen besagen, daß für jedes $w \in V$ $\langle \ldots, w \rangle : V \longrightarrow \mathbb{K}$, $v \mapsto \langle v, w \rangle$ eine Linearform von V, d.h. ein Element des Dualraums $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ ist.

2.) Für alle $v, w_1, w_2, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ folgt aus (S1), (S2), (S3):

$$\left.\begin{aligned} \langle v, w_1 + w_2 \rangle &= \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle \\ \langle v, \lambda w \rangle &= \bar{\lambda} \langle v, w \rangle \end{aligned}\right\}$$

linear im 2. Argument im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, „semilinear" im 2. Argument im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

(wegen $\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \overline{\langle w_1 + w_2, v \rangle} = \overline{\langle w_1, v \rangle + \langle w_2, v \rangle}$

$\overset{\text{klar}}{=} \overline{\langle w_1, v \rangle} + \overline{\langle w_2, v \rangle} = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle$,

$\langle v, \lambda w \rangle = \overline{\langle \lambda w, v \rangle} = \overline{\lambda \langle w, v \rangle} \overset{\text{klar}}{=} \bar{\lambda} \overline{\langle w, v \rangle} = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle$).

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind also für jedes $v \in V$ $\langle \dots, v \rangle$ linear und $\langle v, \dots \rangle$ linear, d.h. per def.: $\langle\ \rangle$ ist „bilinear" oder auch eine „Bilinearform". Ein Skalarprodukt ist also im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eine symmetrische und positiv definite Bilinearform.

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind also für alle $v \in V$ $\langle \dots, v \rangle$ linear und $\langle v, \dots \rangle$ semilinear, d.h. per def.: $\langle\ ,\ \rangle$ ist „sesquilinear" („1½-fach linear") oder auch eine „Sesquilinearform". Eine Sesquilinearform, die auch (S3) erfüllt, heißt ein „hermitesche Form". Ein Skalarprodukt ist also im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eine positiv definite hermitesche Form.

6.6.03
(14.)

3.) Aus (S3) folgt für alle $v \in V$

$$\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle}, \quad \text{d.h. } \langle v, v \rangle \in \mathbb{R} \quad \text{(auch im Falle } \mathbb{K} = \mathbb{C})$$

Man kann in (S3) im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nicht alternativ „$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$" als Axiom wählen, denn sonst folgte wegen

$$\forall_{v \in V \setminus \{0\}} \quad \underbrace{\langle iv, iv \rangle}_{\neq 0} \overset{(S2)}{=} i \underbrace{\langle v, iv \rangle}_{= \langle iv, v \rangle} \overset{(S2)}{=} i^2 \langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle$$

sofort ein Widerspruch zu (S4).

8.2 Beispiele

1.) Sei $V = \mathbb{K}^n$. Dann wird durch

$$\forall_{v=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n} \quad \langle v, w \rangle := \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \overline{w_j}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ definiert, das sog. kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$. Wir betrachten in Zukunft $\mathbb{K}^n$ stets als $\mathbb{K}$-Vektorraum mit diesem Skalarprodukt.

[Zu (S3): $\overline{\langle w, v \rangle} = \overline{\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \overline{v_j}} = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \overline{w_j} = \langle v, w \rangle$,

Zu (S4): $\langle v, v \rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \overline{v_j} = \sum_{j=1}^{n} |v_j|^2 \geq 0$,

> 0, falls $v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$]

2.) Sei $V := \{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig} \}$. V ist ein unendlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und durch

$$\forall_{f,g \in V} \quad \langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

$$\left(:= \int_0^1 \mathrm{Re}\left(f(x)\overline{g(x)}\right) dx + i \int_0^1 \mathrm{Im}\left(f(x)\overline{g(x)}\right) dx \right)$$

wird ein Skalarprodukt auf V definiert. (Beweis selbst als Übung)

8.3 Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\langle , \rangle$ ein Skalarprodukt auf V.
Dann gilt für alle $v, w \in V$:

$$\boxed{|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle \langle w, w\rangle} \qquad (*)$$

mit "=" genau dann, wenn v, w linear abhängig

Setzt man $\forall_{x \in V}\ \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$, so ist (*) offenbar äquivalent zu

$$\boxed{|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|} \qquad (**)$$

mit "=" genau dann, wenn v, w linear abhängig

Beweis: Im Falle $v = 0$ ist die Beh. klar, (denn beide Seiten von (*) sind $= 0$ (vgl. Ü 104(i)) und v, w sind linear abhängig). Im folgenden nehmen wir daher an, daß $v \neq 0$, d.h. nach (S4): $\langle v, v\rangle > 0$. Wir zeigen zunächst:

$$v, w \text{ sind linear abhängig} \iff w - \frac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v = 0. \qquad (1)$$

[Zu (1): "$\Leftarrow$" ist klar. Zu "$\Rightarrow$": Sind v, w linear abhängig, so folgt aus $v \neq 0$ die Existenz eines $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $w = \lambda v$ und es folgt

$$\langle w, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v\rangle}_{>0},$$

also $\lambda = \dfrac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$ und daher $w = \dfrac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$.]

Nunmehr folgt:

$$0 \leq \left\langle w - \frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v,\ w - \frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v \right\rangle$$

"$=$" genau dann, wenn v, w lin. abhängig (nach (1) und (S4))

$$= \langle w,w\rangle - \left\langle w, \frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v\right\rangle - \left\langle \frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v, w\right\rangle + \left\langle \frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v, \frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v\right\rangle$$

$$= \langle w,w\rangle - \frac{\overline{\langle w,v\rangle}}{\langle v,v\rangle}\langle w,v\rangle - \frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\langle v,w\rangle + \frac{\langle w,v\rangle\overline{\langle w,v\rangle}}{\langle v,v\rangle^2}\langle v,v\rangle$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\langle v,v\rangle}}_{>0}\left(\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - |\langle v,w\rangle|^2 - \cancel{|\langle v,w\rangle|^2} + \cancel{|\langle v,w\rangle|^2}\right),$$

woraus sofort (*) folgt, q.e.d.

8.4 Satz Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\ \rangle$ und sei

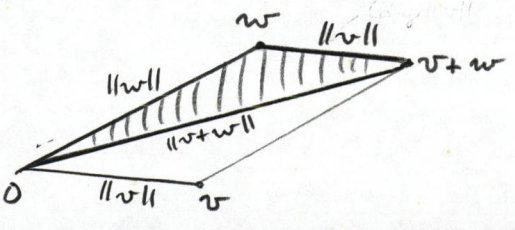
$$\|\ \| : V \to \mathbb{R} \quad \text{def. durch} \quad \forall_{v\in V}\ \|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

Dann ist $\|\ \|$ eine Norm auf V, d.h. per def.:

(N1) $\forall_{v\in V}\ \|v\| \geq 0$ und $\left(\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0\right)$,

(N2) $\forall_{v,w\in V}\ \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ „Dreiecksungleichung",

(N3) $\forall_{v\in V}\ \forall_{\lambda\in\mathbb{K}}\ \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$.



Beweis: Zu (N1) Klar wegen $\forall_{v \in V-\{0\}} \underbrace{\langle v, v\rangle}_{\|v\|^2} > 0$ (nach (S4))

und wegen $\underbrace{\langle 0, 0\rangle}_{\|0\|^2} = 0$ (z.B. nach Ü 104 (i)).

Zu (N2) $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle$

$$= \underbrace{\langle v, v\rangle}_{\|v\|^2} + \underbrace{\langle w, w\rangle}_{\|w\|^2} + \underbrace{\langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle}}_{= 2\,\mathrm{Re}(\langle v, w\rangle) \le 2\,|\langle v, w\rangle|}$$

$$\overset{\text{C.S. 8.3(**)}}{\le} \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| = \left(\|v\| + \|w\|\right)^2$$

Zu (N3): $\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle v, v\rangle = |\lambda|^2 \|v\|^2$

$= \left(|\lambda|\,\|v\|\right)^2$, q.e.d.

Verabredung: Wir werden in Zukunft einen $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt (d.h. einen euklidischen Vektorraum im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. einen unitären Vektorraum im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) automatisch auch als einen normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum wie in 8.4 betrachten.

8.5 Bemerkung Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$, so läßt sich das Skalarprodukt aus der Norm wie folgt berechnen:

a) im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\forall_{v,w \in V} \quad \langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right),$$

b) im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$\forall_{v,w \in V} \quad \langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|v+iw\|^2 - \|v-iw\|^2\right)$$

$$\overset{\text{klar}}{=} \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k \|v+i^k w\|^2$$

[Zu a): $r.S. = \frac{1}{4}\left(\langle v+w, v+w\rangle - \langle v-w, v-w\rangle\right)$

$= \frac{1}{4}\Big(\cancel{\langle v,v\rangle} + \cancel{\langle w,w\rangle} + \langle v,w\rangle + \overbrace{\langle w,v\rangle}^{\langle v,w\rangle}$

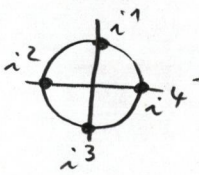
$\quad - \cancel{\langle v,v\rangle} - \cancel{\langle w,w\rangle} + \langle v,w\rangle + \underbrace{\langle w,v\rangle}_{\langle v,w\rangle}\Big)$

$= \frac{1}{4}\, 4\langle v,w\rangle = \langle v,w\rangle.$

Zu b): $r.S. = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{4} i^k \underbrace{\langle v+i^k w,\ v+i^k w\rangle}_{\langle v,v\rangle + \underbrace{i^k \overline{i^k}}_{=1}\langle w,w\rangle + i^k\langle w,v\rangle + \overline{i^k}\langle v,w\rangle}\right)$

$= \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{4} i^k}_{=0}\Big)\left(\langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle\right) + \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{4} \overbrace{i^{2k}}^{(-1)^k}}_{=0}\Big)\langle w,v\rangle$

$\quad + \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{4} \underbrace{i^k \overline{i^k}}_{=1}}_{=4}\Big)\langle v,w\rangle$



$= \langle v,w\rangle.$]

8.6 Def.: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt.

(i) Seien $v, w \in V$.

v, w heißen **orthogonal** $:\Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0$,

v, w heißen **orthonormal** $:\Leftrightarrow$ v, w orthogonal und $\underbrace{\|v\| = \|w\| = 1}_{\text{d.h. } \langle v, v\rangle = \langle w, w\rangle = 1}$.

(ii) Sei $M \subset V$.

M heißt $\left\{\begin{array}{l}\text{orthogonal}\\ \text{orthonormal}\end{array}\right\} :\Leftrightarrow \forall\limits_{\substack{v,w\in M\\ v\neq w}} v, w \left\{\begin{array}{l}\text{orthogonal}\\ \text{orthonormal}\end{array}\right\}$

$v_1, \dots, v_r \in V$ $(r \in \mathbb{N}_+)$ heißen $\left\{\begin{array}{l}\text{orthogonal}\\ \text{orthonormal}\end{array}\right\}$, wenn $\{v_1, \dots, v_r\} \subset V$ $\left\{\begin{array}{l}\text{orthogonal}\\ \text{orthonormal}\end{array}\right\}$ ist.

Beispiel: $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{K}^n$ ist orthonormal (bzgl. des kanon. Skalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle$ von $\mathbb{K}^n$).

8.7 Satz Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und sei $M \subset V$ eine orthogonale Teilmenge von V mit $0_V \notin M$. Dann gilt:

(i) M ist linear unabhängig, (d.h. je endlich viele voneinander verschiedene Elemente von M sind linear unabhängig, vgl. 4.5(ii)).

(ii) $\#M \leq n$, falls $\dim V = n \in \mathbb{N}_+$.

Beweis: zu (i): Seien $v_1, \dots, v_r \in M$ voneinander verschieden und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ mit $\sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k v_k = 0$ $(r \in \mathbb{N}_+)$. Dann folgt:

$$\forall_{j\in\{1,\dots,r\}} \quad 0 = \langle \underbrace{\sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k}_{=0}, v_j \rangle = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \underbrace{\langle v_k, v_j \rangle}_{\substack{=0 \\ \text{für } k\neq j}}$$

$$= \lambda_j \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{>0,\ \text{da } v_j \neq 0 \text{ wegen } 0\notin M}$$

also $\lambda_j = 0$.

Zu (ii): klar nach (i), q.e.d.

8.8 Satz (Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und seien $v_1, \dots, v_r \in V$ linear unabhängig ($r \in \mathbb{N}_+$).
Wir definieren rekursiv

$$u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$u_2 := \frac{v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1\|}$$

. . . . . .

$$\forall_{k\in\{1,\dots,r-1\}} \quad u_{k+1} := \frac{v_{k+1} - \left(\langle v_{k+1}, u_1\rangle u_1 + \dots + \langle v_{k+1}, u_k\rangle u_k\right)}{\| \quad " \quad " \quad \|}$$

Dann folgt:

(i) $u_1, \dots, u_r$ sind orthonormal,

(ii) $\forall_{k\in\{1,\dots,r\}}$ $\operatorname{Spann}\{u_1, \dots, u_k\} = \operatorname{Spann}\{v_1, \dots, v_k\}$.

Bemerkung Man sagt: „Die (orthonormalen) Vektoren $u_1, \dots, u_r$ sind aus $v_1, \dots, v_r$ durch Gram-Schmidt-Orthonormalisierung erhalten"

Beweis: Es ist auch die Wohldefiniertheit der u_k zu zeigen.

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \dots, v_r$ gilt insbesondere $v_1 \neq 0$, d.h. $\|v_1\| > 0$, also können wir

$u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ setzen. Dann gilt $\|u_1\| = \frac{1}{\|v_1\|} \|v_1\| = 1$, also ist

u_1 orthonormal und $\operatorname{Spann}\{u_1\} = \operatorname{Spann}\{v_1\}$.

Angenommen $k \in \{1, \dots, r-1\}$ und $u_1, \dots, u_k$ sind bereits so definiert, daß $u_1, \dots, u_k$ orthonormal und $\operatorname{Spann}\{u_1, \dots, u_k\} = \operatorname{Spann}\{v_1, \dots, v_k\}$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \dots, v_r$ gilt

$$v_{k+1} \notin \operatorname{Spann}\{v_1, \dots, v_k\} = \operatorname{Spann}\{u_1, \dots, u_k\},$$

also folgt

$$v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1}, u_j \rangle u_j \neq 0,$$

also können wir definieren

$$u_{k+1} := \frac{v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1}, u_j \rangle u_j}{\| v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1}, u_j \rangle u_j \|}$$

Dann folgt $\|u_{k+1}\| = 1$ und

$$\forall_{\ell \in \{1, \dots, k\}} \quad \underbrace{\langle u_{k+1}, u_\ell \rangle}_{\overline{\langle u_\ell, u_{k+1} \rangle}} = \frac{1}{\| \ \|} \underbrace{\langle v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1}, u_j \rangle u_j, u_\ell \rangle}_{\langle v_{k+1}, u_\ell \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1}, u_j \rangle \underbrace{\langle u_j, u_\ell \rangle}_{\delta_{j\ell}}}$$

$$= 0,$$

also auch $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}$ orthonormal.

Ferner $v_{k+1} \in \operatorname{Spann}\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}\}$ und

$$u_{k+1} \in \operatorname{Spann}\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}\} = \operatorname{Spann}\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\},$$

wegen $\operatorname{Spann}\{u_1, \dots, u_k\} = \operatorname{Spann}\{v_1, \dots, v_k\}$

also $$\operatorname{Spann}\{u_1, \dots, u_{k+1}\} = \operatorname{Spann}\{v_1, \dots v_{k+1}\}, \quad \text{q.e.d.}$$

8.9 Satz Jeder $n \in \mathbb{N}_+$-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt besitzt eine Orthonormalbasis (kurz: ONB) $(u_1, \dots, u_n)$, (d.i. eine Basis $(u_1, \dots, u_n)$ derart, daß $u_1, \dots, u_n$ orthonormal).

Ist $(u_1, \dots, u_n)$ eine beliebige ONB von V, so gilt

$$\forall_{v \in V} \quad v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_n \rangle u_n . \quad (*)$$

Beweis: Wir wählen eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V.
Sei $(u_1, \dots, u_n)$ die Basis von V, die aus $(v_1, \dots, v_n)$ durch Orthonormalisierung nach Gram-Schmidt entsteht.
Dann ist $(u_1, \dots, u_n)$ eine ONB von V.
Sei im folgenden $(u_1, \dots, u_n)$ eine beliebige ONB von V und sei $v \in V$. Es existieren also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j$ und es folgt

$$\forall_{k \in \{1, \dots, n\}} \quad \langle v, u_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle u_j, u_k \rangle}_{\delta_{jk}} = \lambda_k ,$$

also $$v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j , \quad \text{q.e.d.}$$

Allgemeiner gilt der folgende Satz:

8.10 Satz Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und seien $u_1, \dots, u_r \in V$ orthonormal ($r \in \{1, \dots, n-1\}$). Dann läßt sich $(u_1, \dots, u_r)$ fortsetzen zu einer ONB $(u_1, \dots, u_n)$ von V

Beweis: Nach dem Basisergänzungssatz 4.14(iii) existieren zunächst $v_{r+1}, \dots, v_n \in V$ derart, daß $(u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von V ist. Wir orthonormalisieren diese Basis nach Gram-Schmidt und erhalten eine ONB $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_r, \tilde{u}_{r+1}, \dots, \tilde{u}_n)$ von V. Dann gilt offenbar $\tilde{u}_j = u_j$ für $j = 1, \dots, r$, da $u_1, \dots, u_r$ bereits orthonormal, also folgt die Behauptung mit $(u_1, \dots, u_n) := (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$, q.e.d.

8.11 **Def.**: Seien V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V und $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine (geordnete) Basis von V.

Dann heißt

$$G = (g_{jk})_{j,k=1,\dots,n} \in M_n(\mathbb{K}) \text{ mit } \forall_{j,k}\ g_{jk} := \langle v_j, v_k \rangle$$

die Matrix von $\langle \dots, \dots \rangle$ bzgl. $\mathcal{A}$.

Bemerkungen 1.) Für alle $v = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\alpha_j}_{\in \mathbb{K}} v_j$, $w = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\beta_j}_{\in \mathbb{K}} v_j \in V$ gilt

$$\langle v, w \rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k v_k \Big\rangle = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta_k} \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{g_{jk}}$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j g_{jk} \overline{\beta_k}$$

$$\underset{\text{klar}}{=} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix}$$

2.) $\forall_{j,k}\ g_{jk} = \langle v_j, v_k \rangle = \overline{\langle v_k, v_j \rangle} = \overline{g_{kj}}$.

3.) $\forall_{v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \in V \setminus \{0\}}\ 0 < \langle v, v \rangle \underset{1.)}{=} \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk} \alpha_j \overline{\alpha_k}$

4.) $\det G \neq 0$ [Denn wäre $\det G = 0$, so existierte ein $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ mit $G \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, also folgte für

$v := \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j} v_j \in V \setminus \{0\}$:

$$0 < \langle v, v \rangle \underset{3.)}{=} \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk} \overline{\lambda_j} \lambda_k = \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} g_{jk} \lambda_k}_{=0} = 0,$$

also ein Widerspruch!]

8.12 **Def.:** Sei $A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n} \in M_n(\mathbb{K})$.

(i) $A^* := (\overline{a_{kj}})_{j,k=1,\dots,n} = \overline{A^t} = \overline{A}^t \in M_n(\mathbb{K})$

heißt die zu A transponiert konjugierte Matrix.

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt also $A^* = A^t$.

(ii) Im Falle $\left\{ \begin{matrix} \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{matrix} \right\}$ heißt A $\left\{ \begin{matrix} \text{symmetrisch} \\ \text{hermitesch} \end{matrix} \right\}$, falls $A = A^*$.

(iii) A heißt **positiv definit**, falls $A = A^*$ (d.h. A symmetrisch bzgl. hermitesch) und zusätzlich

$$\forall_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n - \{0\}} \quad \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \lambda_j \overline{\lambda}_k > 0 ,$$

d.h. genau:

$$\forall_{v \in \mathbb{K}^n - \{0\}} \quad \underbrace{\langle Av, v \rangle}_{\Phi_A(v)} > 0 \quad (\text{d.h.} \in \mathbb{R}_+)$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$: kanon. Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$)

(Beachte: $\forall_{v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j}$ $\langle Av, v \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{Ae_j}_{\sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k}, \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell e_\ell \rangle$

$$= \sum_{j,k,\ell=1}^{n} \lambda_j a_{kj} \overline{\lambda}_\ell \underbrace{\langle e_k, e_\ell \rangle}_{\delta_{k\ell}} = \sum_{j,k=1}^{n} a_{kj} \lambda_j \overline{\lambda}_k \quad)$$

Bemerkungen: 1.) Für alle $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$A^{**} := (A^*)^* = A ,$$

$$(A+B)^* = A^* + B^* ,$$

$$(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^* ,$$

$$(AB)^* = B^* A^* .$$

[wegen $(A^*)^* = \left(\overline{\overline{A^t}}\right)^t = A^{tt} = A$,

$(A+B)^* = \overline{A+B}^t = \left(\overline{A}+\overline{B}\right)^t = \overline{A}^t + \overline{B}^t = A^* + B^*$,

$(\lambda A)^* = \overline{\lambda A}^t = \left(\overline{\lambda}\,\overline{A}\right)^t = \overline{\lambda}\,\overline{A}^t = \overline{\lambda}\,A^*$,

$(AB)^* = \overline{(AB)^t} = \overline{B^t A^t} = \overline{B^t}\,\overline{A^t} = B^* A^*$].

2.) Seien V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V.

a) Ist $\left\{\begin{matrix}\mathbb{K}=\mathbb{R}\\ \mathbb{K}=\mathbb{C}\end{matrix}\right\}$ und $\langle\ ,\ \rangle$ eine $\left\{\begin{matrix}\text{symmetrische Bilinearform}\\ \text{hermitesche Form}\end{matrix}\right\}$ auf V, so ist die Matrix $\left(\langle v_j, v_k\rangle\right)_{j,k=1,\dots,n}$

$\left\{\begin{matrix}\in M_n(\mathbb{R}) \text{ symmetrisch}\\ \in M_n(\mathbb{C}) \text{ hermitesch}\end{matrix}\right\}$ (klar)

b) Ist $\langle\ ,\ \rangle$ darüber hinaus ein Skalarprodukt auf V, so ist die Matrix $A := \left(\langle v_j, v_k\rangle\right)_{j,k=1,\dots,n} \in M_n(\mathbb{K})$ (von $\langle\ \rangle$ bzgl. $\mathcal{A}$) positiv definit (klar, vgl. 8.11, Bemerkung 3))

c) In ii 109 wird gezeigt: Ist umgekehrt $A \in M_n(\mathbb{K})$ positiv definit (insbes. symmetrisch bzw. hermitesch), so existiert genau ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ von V derart, daß die Matrix von $\langle\ ,\ \rangle$ bzgl. $\mathcal{A}$ gleich A ist.

Zusammen mit b) besagt dies:

Für einen n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit vorgegebener geordneter Basis entsprechen die Skalarprodukte auf V umkehrbar eindeutig den positiv definiten Matrizen $\in M_n(\mathbb{K})$.

8.13 Def.: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und sei $M \subset V$ eine Teilmenge von V. Dann heißt:

$$M^{\perp} := \{ v \in V \mid \forall_{w \in M} \underbrace{\langle v, w \rangle = 0}_{\text{d.h. genau } \langle w, v \rangle = 0} \} \subset V$$

das orthogonale Komplement von M in V

8.14 Satz Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Dann gilt:

(i) Für jede Teilmenge $M \subset V$ ist $M^{\perp}$ ein Untervektorraum von V.

(ii) $\{0\}^{\perp} = V$ und $V^{\perp} = \{0\}$.

Beweis: Zu (i): Seien $v_1, v_2 \in M^{\perp}$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Dann folgt

$$\forall_{w \in M} \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle v_1, w \rangle}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{\langle v_2, w \rangle}_{=0} = 0,$$

also $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in M^{\perp}$.

Zu (ii): $\{0\}^{\perp} = \{ v \in V \mid \langle v, 0 \rangle = 0 \} = V$,

$$V^{\perp} = \{ v \in V \mid \underbrace{\forall_{w \in V} \langle v, w \rangle = 0}_{\overset{\text{ü104(i)}}{\Leftrightarrow} \; v = 0} \} = \{0\}, \quad \text{q.e.d.}$$

8.15 Satz Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und sei $W \subset V$ ein k-dim. Untervektorraum von V. Dann folgt:

(i) $W^{\perp}$ ist ein $(n-k)$-dim. Untervektorraum von V,

(ii) $V = W \oplus W^{\perp}$,

(iii) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Beweis: Zu (i), (ii): Sei $(u_1, \dots, u_k)$ eine ONB von W. Nach 8.10 existiert eine Fortsetzung zu einer ONB $(u_1, \dots, u_n)$ von V.

Dann folgt

$$W^\perp = \operatorname{Spann}\{u_{k+1}, \dots, u_n\} \quad (*)$$

[Zu (*): 1) Sei $v \in W^\perp$, d.h. $\forall_{w \in W} \langle v, w \rangle = 0$, d.h. wegen $W = \operatorname{Spann}\{u_1, \dots, u_k\}$: $\forall_{j \in \{1, \dots, k\}} \langle v, u_j \rangle = 0$, also

$$v \overset{8.9(*)}{=} \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j = \sum_{j=k+1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j \in \operatorname{Spann}\{u_{k+1}, \dots, u_n\}.$$

2) Sei $v \in \operatorname{Spann}\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$, $v = \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j u_j$. Dann folgt

$$\forall_{\ell \in \{1, \dots, k\}} \langle v, u_\ell \rangle = \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle u_j, u_\ell \rangle}_{\delta_{j\ell} = 0 \text{ (wegen } \ell \le k < j)} = 0,$$

also auch wegen $W = \operatorname{Spann}\{u_1, \dots, u_k\}$: $\forall_{w \in W} \langle v, w \rangle = 0$, d.h. $v \in W^\perp$.]

Aus (*) folgen sofort (i) und (ii).

Zu (iii): $W \subset \{v \in V \mid \forall_{w \in W^\perp} \langle v, w \rangle = 0\} \underset{\text{Def.}}{=} (W^\perp)^\perp$,

$$\dim (W^\perp)^\perp \underset{(i)}{=} n - (\dim W^\perp) \underset{(i)}{=} n - (n - \dim W) = \dim W = k$$

Daher ist W ein k-dim. Untervektorraum des k-dim. Vektorraums $(W^\perp)^\perp$, also folgt (iii), q.e.d.

8.16 Satz Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Dann gilt:

Die Abbildung

$$\iota : V \longrightarrow V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) \qquad (*)$$
$$v \longmapsto \underbrace{\langle \dots, v \rangle}_{\substack{V \to \mathbb{K} \\ w \mapsto \langle w, v \rangle}} \quad \mathbb{K}\text{-linear}$$

ist bijektiv.

Zusatz: Ist $(u_1, \dots, u_n)$ eine beliebige ONB von V und $\varphi \in V^*$, so gilt

$$\iota^{-1}(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\varphi(u_j)}\, u_j \,. \qquad (**)$$

Beweis: ι wie in $(*)$ ist wohldefiniert als Abbildung $V \to V^*$.

Zur Injektivität von ι: Seien $v_1, v_2 \in V$ mit $\iota(v_1) = \iota(v_2)$, d.h. $\langle \dots, v_1 \rangle = \langle \dots, v_2 \rangle$, d.h. $\langle \dots, v_1 - v_2 \rangle = 0$. Dann folgt nach II 10.4 (i): $v_1 - v_2 = 0$, d.h. $v_1 = v_2$.

Zur Surjektivität von ι und zum Zusatz: Sei $\varphi \in V^*$ und sei $w := \sum_{j=1}^{n} \overline{\varphi(u_j)}\, u_j \in V$. Dann folgt:

$$\forall_{k \in \{1,\dots,n\}} \quad \underbrace{\iota(w)}_{\in V^*}(u_k) = \langle u_k, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} \varphi(u_j) \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{\delta_{kj}} = \varphi(u_k),$$

d.h. $\iota(w) = \varphi$, q.e.d.

8.17 Satz

Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $f \in \mathrm{End}(V)$.

Dann existiert genau ein $f^* \in \mathrm{End}(V)$ mit ($f^* = f^{*,\langle\ \rangle}$ (hängt von $\langle\ \rangle$ ab))

$$\forall_{v,w \in V} \underbrace{\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle}_{\text{d.h. genau: } \langle f^*(w), v\rangle = \langle w, f(v)\rangle} \qquad (*)$$

24.6.03 (17.) f^* heißt <u>der zu f adjungierte Endomorphismus von V</u>

<u>Beweis:</u> Für jedes $w \in V$ ist die Abbildung $\varphi_w : V \to \mathbb{K}$, definiert durch $\forall_{v \in V}\ \varphi_w(v) := \langle f(v), w\rangle$, $\mathbb{K}$-linear, d.h. $\varphi_w \in V^*$, (denn $\varphi_w = \langle \dots, w\rangle \circ f$ ist Komposition von $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen).

Angenommen $f^* : V \to V$ ist eine Abbildung. Dann hat f^* genau dann die Eigenschaft $(*)$, wenn

$$\forall_{w \in V}\ \forall_{v \in V}\ \iota(f^*(w))(v) = \varphi_w(v),$$

d.h. $$\forall_{w \in V}\ \iota(f^*(w)) = \varphi_w, \quad f^*(w) = \iota^{-1}(\varphi_w),$$

insbes. ist f^* eindeutig bestimmt.

Zu zeigen bleibt die $\mathbb{K}$-Linearität von f^*. Seien $w_1, w_2 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Dann folgt $f^*(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 f^*(w_1) + \lambda_2 f^*(w_2)$ aus

$$\begin{aligned}
\forall_{v \in V}\ \langle v, f^*(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)\rangle &\underset{(*)}{=} \langle f(v), \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\rangle \\
&= \overline{\lambda_1}\langle f(v), w_1\rangle + \overline{\lambda_2}\langle f(v), w_2\rangle \\
&\underset{(*)}{=} \overline{\lambda_1}\langle v, f^*(w_1)\rangle + \overline{\lambda_2}\langle v, f^*(w_2)\rangle \\
&= \langle v, \lambda_1 f^*(w_1) + \lambda_2 f^*(w_2)\rangle
\end{aligned}$$

und der Injektivität von $\iota : V \to V^*$, $z \mapsto \langle \dots, z\rangle$, q.e.d.

Bemerkungen:

1.) $f^* \in \mathrm{End}(V)$ hängt von der Wahl des Skalarprodukts $\langle\,,\,\rangle$ ab.

2.) Für $f \in \mathrm{End}(V)$, d.h. $f: V \to V$ $\mathbb{K}$-linear, hatten wir in 6.23 die zu f duale $\mathbb{K}$-lineare Abbildung

$f^*: \underline{\underline{V^*}} \to \underline{\underline{V^*}}$, d.h. $f^* \in \mathrm{End}(\underline{\underline{V^*}})$ definiert.

Der Zusammenhang zwischen $f^* \in \mathrm{End}(V^*)$ wie in 6.23 und $f^* \in \mathrm{End}(V)$ wie in 8.17(*), wofür wir jetzt ausführlicher $f^{*,\langle\,,\,\rangle}$ schreiben, ist der folgende:

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f^{*,\langle\,,\,\rangle}} & V \\ {\scriptstyle L \text{ bijekt.}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L \text{ bijektiv (wie in 8.16)}} \\ V^* & \xrightarrow[f^*]{} & V^* \end{array}$$

ist kommutativ.

[Denn für alle $w \in V$ gilt:

$$\forall_{v \in V} \Big(L\big(f^{*,\langle\,,\,\rangle}(w)\big)\Big)(v) = \langle v,\, f^{*,\langle\,,\,\rangle}(w)\rangle \underset{(*)}{=} \langle f(v), w\rangle$$

$$= \big(L(w) \circ f\big)(v) \underset{6.23}{=} \big(f^*(\underbrace{L(w)}_{\in V^*})\big)(v)$$

d.h. $L(f^{*,\langle\,,\,\rangle}(w)) = f^*(L(w))$.]

8.18 Satz Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und sei $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_n)$ eine ONB von V. Dann gilt

$$\forall_{f \in \mathrm{End}(V)} \; M_{\mathcal{A}}(f^*) = \underbrace{\overline{M_{\mathcal{A}}(f)}}_{=}{}^{t} \in M_n(\mathbb{K}).$$

Beweis: Seien

$$A := M_{\mathcal{A}}(f), \quad B := M_{\mathcal{A}}(f^*) \in M_n(\mathbb{K}).$$

$$\| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$$

$$(a_{jk})_{j,k=1,\dots,n} \qquad (b_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$$

Dann folgt:

$$\forall_{k,\ell \in \{1,\dots,n\}} \quad \langle f(u_k), u_\ell \rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{n} a_{jk} u_j, u_\ell \Big\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \underbrace{\langle u_j, u_\ell \rangle}_{\delta_{j\ell}} = a_{\ell k}$$

$$\text{II } 8.17(*)$$

$$\langle u_k, f^*(u_\ell) \rangle = \Big\langle u_k, \sum_{j=1}^{n} b_{j\ell} u_j \Big\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{b_{j\ell}} \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{\delta_{kj}} = \overline{b_{k\ell}},$$

q.e.d.

8.19 **Satz** Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprod. und seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$(f^*)^* = f,$$
$$(f+g)^* = f^* + g^*,$$
$$(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*,$$
$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*,$$
$$id_V^* = id_V.$$

Beweis: Sei $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_n)$ eine ONB von V. Dann folgt aus 8.18, 8.12 Bem. 1.) sowie 6.19, 6.20:

$$M_{\mathcal{A}}((f^*)^*) = \big(M_{\mathcal{A}}(f^*)\big)^* = \big(M_{\mathcal{A}}(f)\big)^{**} = M_{\mathcal{A}}(f),$$

$$M_{\mathcal{A}}((f+g)^*) = \big(M_{\mathcal{A}}(f+g)\big)^* = \big(M_{\mathcal{A}}(f) + M_{\mathcal{A}}(g)\big)^* = \big(M_{\mathcal{A}}(f)\big)^* + \big(M_{\mathcal{A}}(g)\big)^*$$
$$= M_{\mathcal{A}}(f^*) + M_{\mathcal{A}}(g^*) = M_{\mathcal{A}}(f^* + g^*),$$

$$M_{\mathcal{A}}((\lambda f)^*) = \big(M_{\mathcal{A}}(\lambda f)\big)^* = \big(\lambda M_{\mathcal{A}}(f)\big)^* = \bar{\lambda}\big(M_{\mathcal{A}}(f)\big)^* = \bar{\lambda} M_{\mathcal{A}}(f^*)$$
$$= M_{\mathcal{A}}(\bar{\lambda} f^*),$$

$$M_{\mathcal{A}}((f \circ g)^*) = \big(M_{\mathcal{A}}(f \circ g)\big)^* = \big(M_{\mathcal{A}}(f)\, M_{\mathcal{A}}(g)\big)^* = \big(M_{\mathcal{A}}(g)\big)^* \big(M_{\mathcal{A}}(f)\big)^*$$
$$= M_{\mathcal{A}}(g^*)\, M_{\mathcal{A}}(f^*) = M_{\mathcal{A}}(g^* \circ f^*),$$

$$M_{\mathcal{A}}(id_V^*) = \big(M_{\mathcal{A}}(id_V)\big)^* = E_n^* = \overline{E_n}^t = E_n = M_{\mathcal{A}}(id_V)$$

Nach 6.19 folgt hieraus die Behauptung, q.e.d.

8.20 Def.: Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und sei $f \in \mathrm{End}(V)$.

f heißt <u>selbstadjungiert</u> $:\Leftrightarrow f^* = f$,

f heißt <u>schiefadjungiert</u> $:\Leftrightarrow f^* = -f$.

<u>Bemerkungen</u> 1) Ob f selbstadjungiert (bzw. schiefadjungiert) ist oder nicht, hängt von der Wahl des Skalarprodukts ab.

2) Sei $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_n)$ eine ONB von V.
Dann ist $f \in \mathrm{End}(V)$ genau dann selbstadjungiert (bzw. schiefadjungiert), wenn

$$\underbrace{\left(M_{\mathcal{A}}(f)\right)^*}_{\overline{M_{\mathcal{A}}(f)}^t} = M_{\mathcal{A}}(f) \quad \left(\text{bzw. } = -M_{\mathcal{A}}(f) = M_{\mathcal{A}}(-f)\right)$$

$$\left[\text{wegen } \left(M_{\mathcal{A}}(f)\right)^* \overset{8.18}{=} M_{\mathcal{A}}(f^*) \text{ und } 6.19.\right]$$

8.21 Satz Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert.
Dann ist jeder Eigenwert von f reell. (Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nonsens klar)

<u>Beweis</u>: Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von f. Dann existiert also ein $v \in V - \{0\}$ mit $f(v) = \lambda v$ und es folgt

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle f(v), v \rangle = \langle v, \underbrace{f^*(v)}_{f(v)} \rangle = \langle v, \lambda v \rangle$$

$$= \bar{\lambda} \underbrace{\langle v, v \rangle}_{>0},$$

also $\lambda = \bar{\lambda}$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$, q.e.d.

8.22 Beispiel (Orthogonalprojektionen)

Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und sei $W \subset V$ ein k-dim. Untervektorraum ($k \in \{0,\dots,n\}$).

Dann gilt nach 8.15(ii):

$$V = W \oplus W^\perp,$$

d.h. $\forall_{v \in V}\ \exists!_{w \in W}\ \underbrace{v - w \in W^\perp}_{\text{d.h. } v = \underbrace{w}_{\in W} + \underbrace{(v-w)}_{\in W^\perp}}$

Wir definieren $P_W : V \to V$ als die eindeutig bestimmte Abbildung mit

$$\forall_{v \in V}\ P_W(v) := \text{das eindeutig bestimmte Element } w \in W \text{ mit } v - w \in W^\perp.$$

P_W heißt **die Orthogonalprojektion von V auf W.**

Dann folgt:

(1) Für jede ONB $(u_1,\dots,u_k)$ von W gilt

$$\forall_{v \in V}\ P_W(v) = \sum_{j=1}^{k} \langle v, u_j \rangle u_j,$$

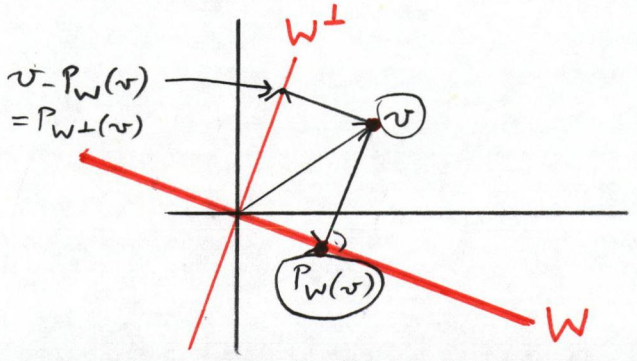
(2) $P_W : V \to V$ ist $\mathbb{K}$-linear (d.h. $P_W \in \mathrm{End}(V)$) und

$$id_V = P_W + P_{W^\perp},$$

(3) $P_W^* = P_W$,

(4) $\underbrace{P_W P_W}_{P_W^2} = P_W$,

(5) $\forall_{v \in W}\ P_W(v) = v$ und $\forall_{\tilde{v} \in W^\perp}\ P_W(\tilde{v}) = 0$



[Beweis: Sei $(u_1,\dots,u_k)$ eine ONB von W und $(u_1,\dots,u_n)$ eine Erweiterung zu einer ONB von V, also offenbar $(u_{k+1},\dots,u_n)$ ONB von $W^\perp$.

Zu (1),(2): $\forall_{v\in V}\ v = \underbrace{\sum_{j=1}^{k}\langle v,u_j\rangle u_j}_{\in W=(W^\perp)^\perp} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{n}\langle v,u_j\rangle u_j}_{\in W^\perp}$,

also $P_W(v)=\sum_{j=1}^{k}\langle v,u_j\rangle u_j$ und $P_{W^\perp}(v)=\sum_{j=k+1}^{n}\langle v,u_j\rangle u_j$,
also gelten offenbar (1) und (2).

Zu (3): Sei $\mathcal{A}=(u_1,\dots,u_n)$. Dann gilt nach (1):

$$M_{\mathcal{A}}(P_W)=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\}k\\ \}n-k\end{matrix},\quad \text{also}\quad \overline{\left(M_{\mathcal{A}}(P_W)\right)}^{t}=M_{\mathcal{A}}(P_W),$$

$$\overline{M_{\mathcal{A}}(P_W)}^{t}$$

also nach 8.20, Bem. 2): $P_W^*=P_W$.

Zu (4),(5): $\forall_{j\in\{1,\dots,k\}}\ \underbrace{P_W(u_j)=u_j}_{(1)}$ und $\forall_{j\in\{k+1,\dots,n\}}\ \underbrace{P_W(u_j)=0}_{\Rightarrow P_W^2(u_j)=0}$

$\Rightarrow P_W^2(u_j)=P_W(u_j)=u_j$ ($P_W(u_j)$)

Hieraus folgen (4) und (5), q.e.d.]

27.6.03 (18.)

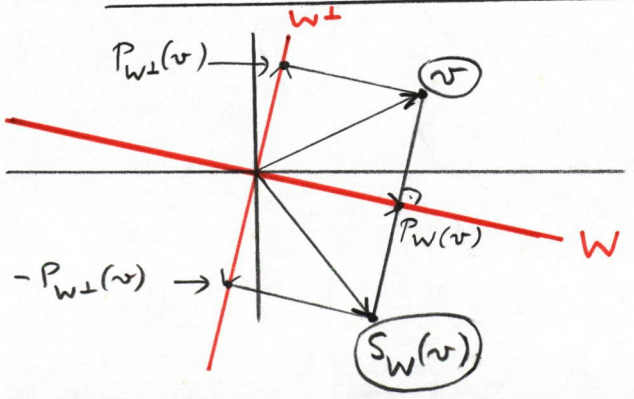
8.23 Beispiel (Orthogonalspiegelungen)

Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und sei $W\subset V$ ein Untervektorraum.

Wir definieren $S_W: V\to V$ durch

$$S_W := P_W - P_W^\perp \overset{8.22,2)}{=} id_V - 2P_W^\perp$$

S_W heißt die Orthogonalspiegelung von V an W.



Analog zu 8.22 gilt offenbar (Beweis als einfache Übung):

(1) Ist $(u_1, \dots, u_k)$ eine ONB von W und $(u_1, \dots, u_n)$ eine Fortsetzung zu einer ONB von V, so gilt

$$\forall_{v \in V} \; S_W(v) = \sum_{j=1}^{k} \langle v, u_j \rangle u_j - \sum_{j=k+1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j ,$$

(2) $S_W \in \mathrm{End}(V)$,

(3) $S_W^* = S_W$,

(4) $\underbrace{S_W S_W}_{S_W^2} = \mathrm{id}_V$, (d.h. S_W ist invertierbar und $S_W^{-1} = S_W$),

(5) $\forall_{v \in W} \; S_W(v) = v$ und $\forall_{\tilde{v} \in W^\perp} \; S_W(\tilde{v}) = -\tilde{v}$.

8.24 Satz Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Seien λ, μ verschiedene Eigenwerte von V und seien $v, w \in V \setminus \{0\}$ mit $f(v) = \lambda v$ und $f(w) = \mu w$.

Dann folgt $\langle v, w \rangle = 0$.

Beweis: Aus

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle f(v), w \rangle = \langle v, \underbrace{f^*}_{=f}(w) \rangle$$

$$= \langle v, \mu w \rangle = \underbrace{\bar{\mu}}_{=\mu,\ \text{da } \mu \in \mathbb{R} \text{ nach 8.21}} \langle v, w \rangle = \mu \langle v, w \rangle$$

folgt wegen $\lambda \neq \mu$: $\langle v, w \rangle = 0$, q.e.d.

8.25 Satz Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Dann besitzt f einen Eigenwert.

Beweis: Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist das Lemma klar nach dem Fundamentalsatz der Algebra (sogar ohne die Vor. der Selbstadjungiertheit von f).

Sei im folgenden $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sei $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_n)$ eine ONB von V und sei

$$A := M_{\mathcal{A}}(f) \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C}),$$

also $A^* = A$ ($= A^t$) (nach 8.20, Bem. 2)).

Nach 6.19 existiert genau ein

$$g \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \quad \text{mit} \quad M_{\mathcal{E}_n}(g) = A.$$

Da $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$ eine ONB von $\mathbb{C}^n$ und

$$\left(M_{\mathcal{E}_n}(g)\right)^* = A^* = \overline{A}^t \underset{\uparrow A \text{ reell}}{=} A^t = A = M_{\mathcal{E}_n}(g),$$

so ist $g \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ selbstadjungiert (nach 8.20, Bem. 2))

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von g, d.h. eine Nullstelle von

$$P_g = \det(g - t\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \overset{\text{wegen } A = M_{\mathcal{E}_n}(g),\ \text{also } A - tE_n = M_{\mathcal{E}_n}(g - t\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}),\ \text{vgl. 6.26}}{=} \det(A - tE_n)$$

$$\underset{\text{wegen } A = M_{\mathcal{A}}(f),\ \text{also } A - tE_n = M_{\mathcal{A}}(f - t\,\mathrm{id}_V),\ \text{vgl. 6.26}}{=} \det(f - t\,\mathrm{id}_V) = P_f \in \mathbb{R}[t] \subset \mathbb{C}[t].$$

Nach 8.21 gilt $\lambda \in \mathbb{R}$, also besitzt $P_f \in \mathbb{R}[t]$ eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von f,

q.e.d.

8.26 Satz Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ und sei W ein Untervektorraum von V, der f-invariant ist.
Dann ist der Untervektorraum $W^\perp$ von V f^*-invariant.

Beweis: Sei $v \in W^\perp$. Zu zeigen ist: $f^*(v) \in W^\perp$,
d.h. $\forall_{w \in W} \underbrace{\langle w, f^*(v)\rangle}_{\| \langle f(w), v\rangle} = 0$.

Dies ist aber klar, da $\forall_{w \in W} f(w) \in W$ (da W f-invariant) und $v \in W^\perp$, q.e.d.

8.27 Satz Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert.
Dann existiert eine ONB von V, bestehend aus Eigenvektoren von f, (insbesondere ist f diagonalisierbar)

Beweis: Vollständige Induktion über $n = \dim V \in \mathbb{N}_+$.
Für $n=1$ ist der Satz trivial.
Angenommen $n-1 \in \mathbb{N}_+$ und der Satz gilt für $(n-1)$ anstelle von n. Sei nun $\dim V = n$ und $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert.
Nach 8.25 besitzt f einen Eigenwert $\lambda_n \in \mathbb{K}$, also existiert ein $u_n \in V$ mit

$$\|u_n\| = 1 \quad \text{und} \quad f(u_n) = \lambda_n u_n .$$

$W := \mathbb{K} u_n$ ist also ein 1-dim. f-invarianter Untervektorraum von V. Nach 8.15(i) und 8.26 ist dann $W^\perp$ ein $(n-1)$-dim. $\underbrace{f^*}_{=f}$-invarianter Untervektorraum von V, also $\tilde{f} := f|W^\perp \in \mathrm{End}(W^\perp)$.

Aus $f^* = f$ folgt, daß auch $\tilde{f}^* = \tilde{f}$ (bzgl. des Skalarprodukts $\langle , \rangle | W^\perp \times W^\perp$ auf $W^\perp$), denn es gilt

$$\forall_{\tilde{v}, \tilde{w} \in W^\perp} \quad \langle \tilde{f}(\tilde{v}), \tilde{w} \rangle = \langle f(\tilde{v}), \tilde{w} \rangle \overset{f^* = f}{=} \langle \tilde{v}, f(\tilde{w}) \rangle = \langle \tilde{v}, \tilde{f}(\tilde{w}) \rangle$$

$$\| \quad \langle \tilde{v}, \tilde{f}^*(\tilde{w}) \rangle ,$$

also

$$\forall_{\tilde{w} \in W^\perp} \quad \tilde{f}^*(\tilde{w}) = \tilde{f}(\tilde{w}) , \qquad \tilde{f}^* = \tilde{f} .$$

Nach Induktionsvoraussetzung, angewandt auf $W^\perp$, $\tilde{f}$, existiert eine ONB $(u_1, \dots, u_{n-1})$ von $W^\perp$ bestehend aus Eigenvektoren von $\tilde{f}$, also auch aus Eigenvektoren von f. Dann ist $(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n)$ eine ONB von V bestehend aus Eigenvektoren von f, q.e.d.

8.28 Satz Sei V ein n-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt (d.h. V ein n-dim. euklidischer Vektorraum) und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:

Es existiert eine ONB von V bestehend aus Eigenvektoren von f

$\iff$ f ist selbstadjungiert

Beweis „$\Leftarrow$" gilt nach 8.27.

„$\Rightarrow$" Es existieren also eine ONB $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_n)$ von V und $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ derart, daß

$$M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dann gilt $M_{\mathcal{A}}(f^*) \underset{8.18}{=} \left(M_{\mathcal{A}}(f)\right)^t \underset{\text{klar}}{=} M_{\mathcal{A}}(f)$,

also $f^* = f$, q.e.d.

8.29 Def.:

(i) Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und sei $f \in \mathrm{End}(V)$.

f heißt normal $:\Leftrightarrow f^* f = f f^*$.

(ii) Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$.

A heißt normal $:\Leftrightarrow A^* A = A A^*$,

$(\text{d.h. } \overline{A^t} A = A \overline{A^t})$

Bemerkungen:

1.) Jeder selbstadjungierte Endomorphismus ist normal

2.) Ist $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine ONB von V, so gilt für $f \in \mathrm{End}(V)$:

f ist normal $\Leftrightarrow M_{\mathcal{A}}(f) \in M_n(\mathbb{K})$ ist normal.

[wegen $f^* f = f f^* \Leftrightarrow \underbrace{M_{\mathcal{A}}(f^* f)}_{=} = \underbrace{M_{\mathcal{A}}(f f^*)}_{=}$

$M_{\mathcal{A}}(f^*) M_{\mathcal{A}}(f) \quad M_{\mathcal{A}}(f) M_{\mathcal{A}}(f^*)$

$=$ $=$

$(M_{\mathcal{A}}(f))^* M_{\mathcal{A}}(f) \quad M_{\mathcal{A}}(f) (M_{\mathcal{A}}(f))^*$.]

3.) Ist $f \in \mathrm{End}(V)$ normal, so gilt

$$\forall_{v \in V} \quad \|f(v)\| = \|f^*(v)\|$$

[wegen $\langle f(v), f(v) \rangle = \langle v, \underbrace{f^* f}(v) \rangle = \langle v, f f^*(v) \rangle = \langle f^* v, f^* v \rangle$.]

Das „komplexe Gegenstück" zu 8.28 lautet:

8.30 Satz Sei V ein n-dim. $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt (d.h. V ein n-dim. unitärer Vektorraum) und sei $f \in End(V)$. Dann gilt:

Es existiert eine ONB von V bestehend aus Eigenvektoren von f

$\Leftrightarrow$ f ist normal

1.7.03 (19.)

Wir bereiten den Beweis von 8.30 durch einige Hilfssätze vor

8.31 Satz Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und sei $f \in End(V)$ normal.

Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V \setminus \{0\}$:

$$f(v) = \lambda v \iff f^*(v) = \bar{\lambda} v .$$

Beweis: Sei $g := f - \lambda id \in End(V)$. Dann folgt

$g^* = f^* - \bar{\lambda}\underbrace{id}_{=id^*}$ (nach 8.19), also folgt weiter

$$g g^* = (f - \lambda id)(f^* - \bar{\lambda} id)$$

$$\overset{f \text{ linear}}{=} \underbrace{f f^*}_{f^* f} - \lambda f^* - \bar{\lambda} f + |\lambda|^2 id$$

$$\overset{f^* \text{linear}}{=} (f^* - \bar{\lambda} id)(f - \lambda id) = g^* g ,$$

d.h. auch g ist normal. Hieraus folgt schließlich

$$f(v) = \lambda v \iff (f - \lambda id)(v) = g(v) = 0 \iff \|g(v)\| = 0$$

$$\overset{8.29 \text{ Bem. 3.)}}{\iff} \|g^*(v)\| = 0 \iff (f^* - \bar{\lambda} id)(v) = g^*(v) = 0$$

$$\iff f^*(v) = \bar{\lambda} v \quad , \quad \text{q.e.d.}$$

8.32 Satz Seien V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und $f \in \mathrm{End}(V)$. Ferner sei $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_n)$ eine ONB von V und $M_{\mathcal{A}}(f) \in M_n(\mathbb{K})$ sei eine obere Dreiecksmatrix. Dann gilt:

f ist normal $\iff$ $M_{\mathcal{A}}(f)$ ist eine Diagonalmatrix.

Beweis: Sei $M_{\mathcal{A}}(f) =: A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$, also $a_{jk} = 0$ für $j > k$

$$M_{\mathcal{A}}(f) = \underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}}, \quad M_{\mathcal{A}}(f^*) \overset{8.18}{=} \underset{A^* = \overline{A^t}}{\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & & & \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}}$$

($\Rightarrow$) Sei f normal. Zu zeigen ist, daß für $s = 1, \dots, n-1$ gilt:

Die ersten s Zeilen von A enthalten außerhalb der Hauptdiagonale nur Nullen. } (*)

Beweis hiervon durch endliche Induktion:

$s = 1$: $f(u_1) = a_{11} u_1$, also folgt aus 8.31:

$$\underbrace{f^*(u_1)}_{= \overline{a_{11}} u_1 + \overline{a_{12}} u_2 + \dots + \overline{a_{1n}} u_n} = \overline{a_{11}} u_1 \quad , \text{ also } a_{12} = a_{13} = \dots = a_{1n} = 0$$

d.h. (*) gilt für $s = 1$

Angenommen $s \in \{2, \dots, n-1\}$ und (*) gilt für $s-1$ anstelle von s.

Dann folgt

$$f(u_s) = \underbrace{a_{1s}}_{=0 \text{ (Ind.Vor.)}} u_1 + \dots + \underbrace{a_{s-1,s}}_{=0} u_{s-1} + a_{ss} u_s = a_{ss} u_s ,$$

also nach 8.31:

$$\underbrace{f^*(u_s)}_{= \overline{a_{ss}} u_s + \overline{a_{s,s+1}} u_{s+1} + \dots + \overline{a_{s,n}} u_n} = \overline{a_{ss}} u_s \quad , \text{ also } a_{s,s+1} = a_{s,s+2} = \dots = a_{s,n} = 0 ,$$

also gilt (*) auch für s.

($\Leftarrow$") Gelte also $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$.

Dann folgt

$$A A^* = \begin{pmatrix} |a_{11}|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |a_{nn}|^2 \end{pmatrix} = A^* A ,$$

d.h. $A = M_{\mathcal{A}}(f)$ ist normal,

also ist nach 8.29, Bem. 2) auch f normal, q.e.d.

8.33 Satz Sei V ein n-dim. $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$-Vektorraum mit Skalarprodukt (d.h. V ein n-dim. unitärer Vektorraum) und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann existiert eine $\underline{\underline{\text{ONB}}}$ $\mathcal{A}$ von V derart, daß $M_{\mathcal{A}}(f) \in M_n(\mathbb{C})$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis: Vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_+$:

Für $n=1$ ist der Satz trivial.

Angenommen der Satz gilt für $n-1 \in \mathbb{N}_+$ anstelle von n.

Sei nun $\dim V = n$ und $f \in \mathrm{End}(V)$. Da V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist und $f^* \in \mathrm{End}(V)$, so existieren $u_n \in V$, $\|u_n\| = 1$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$f^*(u_n) = \lambda u_n .$$

Dann ist der Untervektorraum $\mathbb{C} u_n$ von V f^*-invariant, also ist nach 8.26 der Untervektorraum $\tilde{V} := (\mathbb{C} u_n)^{\perp}$ von V $\underbrace{(f^*)^*}_{f}$-invariant. Nach 8.15(i) gilt $\dim \tilde{V} = n-1$.

Aus der Ind.-Vor., angewandt auf den $(n-1)$-dim. $\mathbb{C}$-Vektorraum

$\tilde{V}$ mit Skalarprodukt $\langle\ \rangle|_{\tilde{V}\times\tilde{V}}$ und $f|_{\tilde{V}} \in \mathrm{End}(\tilde{V})$, existiert eine ONB $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_{n-1})$ von $\tilde{V}$ derart, daß $M_{\mathcal{B}}(f|_{\tilde{V}}) \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Dann ist $\mathcal{A} := (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n)$ eine ONB von V und

$$M_{\mathcal{A}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} M_{\mathcal{B}}(f|_{\tilde{V}}) & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & * \end{array}\right),$$

also ist auch $M_{\mathcal{A}}(f) \in M_n(\mathbb{C})$ eine obere Dreiecksmatrix, q.e.d.

8.34 Satz Sei V ein n-dim. $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ normal.
Dann existiert eine ONB von V bestehend aus Eigenvektoren von f.

Beweis: Nach 8.33 existiert eine ONB $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_n)$ von V derart, daß $M_{\mathcal{A}}(f) \in M_n(\mathbb{C})$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
Dann folgt aus 8.32, daß $M_{\mathcal{A}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist, also ist $(u_1, \dots, u_n)$ eine ONB bestehend aus Eigenvektoren von f, q.e.d.

Beweis von Satz 8.30 (vgl. Seite 252):

„$\Leftarrow$" gilt nach 8.34

„$\Rightarrow$": Es existieren also eine ONB $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_n)$ von V und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: A$, also $A^* = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$

Wegen $A^*A = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} = AA^*$ ist $A \in M_n(\mathbb{C})$ normal,

also ist (nach 8.29, Bem. 2.) auch $f \in \mathrm{End}(V)$, normal,

Q.E.D.

8.35 Def.: Sei V ein euklidischer Vektorraum (d.h. ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt) und seien $v, w \in V - \{0\}$.

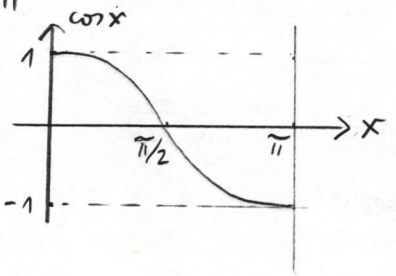
Dann gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung 8.3

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \, \|w\| \quad , \quad \text{d.h.} \quad \Big| \underbrace{\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \, \|w\|}}_{\in \mathbb{R}} \Big| \leq 1 \, ,$$

d.h.

$$-1 \leq \underbrace{\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \, \|w\|}}_{\left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle} \leq 1$$

$\cos|[0,\pi] : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$
ist bijektiv.



Daher existiert genau eine Zahl

$$\sphericalangle(v,w) \in [0,\pi] \text{ mit } \cos(\sphericalangle(v,w)) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \, \|w\|} \qquad (*)$$

$\sphericalangle(v,w)$ heißt der (nichtorientierte) Winkel zwischen v und w.

$= \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \, \|w\|}\right)$ ← Def. von arccos

Bemerkungen und Beispiele:

1.) Für alle $v, w \in V - \{0\}$ gilt nach 8.3

$\sphericalangle(v,w) = 0 \iff v, w$ positiv proportional,
d.h. per def.: $v \in \mathbb{R}_+ w$ (oder äquivalent: $w \in \mathbb{R}_+ v$),

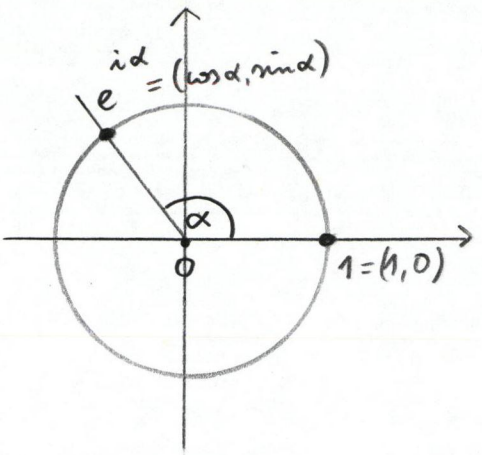
$\sphericalangle(v,w) = \pi \iff v, w$ negativ proportional,
d.h. per def.: $v \in \mathbb{R}_- w$ (oder äquivalent: $w \in \mathbb{R}_- v$),

$\sphericalangle(v,w) = \frac{\pi}{2} \iff \langle v, w\rangle = 0$,

$\sphericalangle(v,w) = \sphericalangle(w,v)$ (wegen $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$).

2.) In $V = \mathbb{R}^2$ gilt

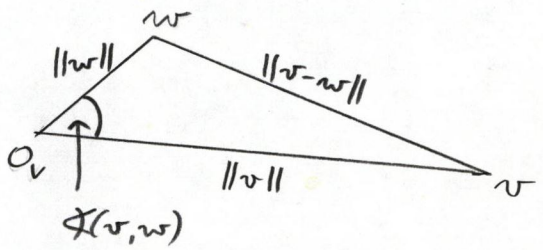
$$\forall_{\alpha \in [0,\pi]} \quad \sphericalangle(1, e^{i\alpha}) = \alpha$$



$$\left(\text{wegen } \cos\alpha = \frac{\langle 1, e^{i\alpha}\rangle}{\underbrace{\|1\|}_{=1}\,\underbrace{\|e^{i\alpha}\|}_{=1}}\right)$$

3.) Für alle $v, w \in V \setminus \{0\}$ gilt

$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\,\|v\|\,\|w\|\cos(\sphericalangle(v,w))$$

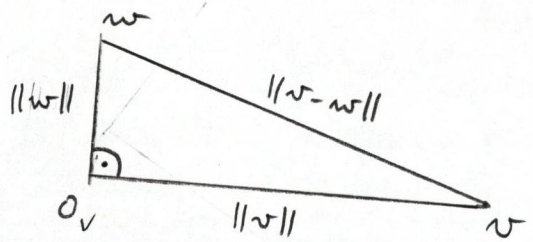


„Cosinussatz der Trigonometrie"

$$\left(\text{wegen } \langle v-w, v-w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle - 2\langle v,w\rangle \text{ und } (*)\right)$$

Im Spezialfall $\langle v,w\rangle = 0$, d.h. $\sphericalangle(v,w) = \frac{\pi}{2}$ erhält man

$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$, den „Satz von Pythagoras".



← Verallgemeinerung der C.S.-Ungleichung (s.u. Bem.)

8.36 Satz Sei V ein n-dim. euklidischer Vektorraum und seien $v_1, \dots, v_k \in V$ $(k \in \{1, \dots, n\})$.

Wir definieren

$$G(v_1, \dots, v_k) := \det \underbrace{\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_k, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_k, v_k \rangle \end{pmatrix}}_{=: A \in M_k(\mathbb{R})}$$

$G(v_1, \dots, v_k)$ heißt <u>die Gramsche Determinante von $v_1, \dots, v_k$</u>.

Dann gilt

$$\left.\begin{aligned} &G(v_1, \dots, v_k) \geq 0 \\ &\text{und} \\ &G(v_1, \dots, v_k) = 0 \iff v_1, \dots, v_k \text{ linear abhängig} \end{aligned}\right\} (*)$$

4.7.03 (20.)

<u>Zusatz:</u> Ist W ein k-dim. Untervektorraum von V mit $v_1, \dots, v_k \in W$ und ist $(u_1, \dots, u_k)$ eine ONB von W, so gilt

$$\sqrt{G(v_1, \dots, v_k)} = \left| \det \begin{pmatrix} \langle v_1, u_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, u_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_k, u_1 \rangle & \cdots & \langle v_k, u_k \rangle \end{pmatrix} \right|$$

<u>Beweis</u> (des Satzes einschließlich des Zusatzes): Seien $W, u_1, \dots, u_k$ wie im Zusatz. Dann gilt

$$\forall_{i \in \{1, \dots, k\}} \quad v_i = \sum_{r=1}^{k} \langle v_i, u_r \rangle u_r$$

Wir definieren

$$B := \underbrace{\left(\langle v_i, u_j \rangle \right)_{i,j=1,\dots,k}}_{= (b_{ij})_{i,j=1,\dots,k}} \in M_k(\mathbb{R})$$

Dann folgt

$$\forall_{i,j\in\{1,\dots,k\}} \quad \langle v_i, v_j\rangle = \Big\langle \sum_{r=1}^{k} \underbrace{\langle v_i, u_r\rangle}_{b_{ir}} u_r \,,\, \sum_{s=1}^{k} \underbrace{\langle v_j, u_s\rangle}_{b_{js}} u_s \Big\rangle$$

$$= \sum_{r,s=1}^{k} b_{ir}\, b_{js} \underbrace{\langle u_r, u_s\rangle}_{\delta_{rs}} = \sum_{r=1}^{k} b_{ir}\, b_{jr} \,,$$

($\langle\,\rangle$ ist bilinear)

d.h.

$$A = B\,B^t \,,$$

also

$$\det A = (\det B)(\det B^t) = (\det B)^2 \geq 0 \,. \quad (1)$$

In der i-ten Zeile der Matrix B stehen die Entwicklungskoeffizienten von $v_i \in W$ bzgl. der ONB $(u_1,\dots,u_k)$ von W, also gilt

$$\text{Rang } B = \text{Zeilenrang } B = \dim \text{Spann}\{v_1,\dots,v_k\},$$

insbesondere

$$\underbrace{\det B = 0}_{\text{d.h. Rang } B < k} \iff \underbrace{v_1,\dots,v_k \text{ linear abhängig}}_{\text{d.h. } \dim \text{Spann}\{v_1,\dots,v_k\} < k} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt die Beh. des Satzes und des Zusatzes,

q.e.d.

Bemerkung: Im Spezialfall $k=2$ besagt die Beh.

$$G(v_1,v_2) = \langle v_1,v_1\rangle\langle v_2,v_2\rangle - \underbrace{\langle v_1,v_2\rangle^2}_{\langle v_1,v_2\rangle\in\mathbb{R} \;\rightarrow\; |\langle v_1,v_2\rangle|^2} \geq 0 \,,$$

wobei "=" genau dann gilt, wenn v_1, v_2 linear abhängig.

Dies ist genau die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung 8.3(*) (im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{R}$).

8.37 Def.: Sei V ein n-dim. euklidischer Vektorraum und seien $v_1, \dots, v_k \in V$ $(k \in \{1, \dots, n\})$.

(i) $$\mathrm{Par}(v_1, \dots, v_k) := \left\{ \sum_{\lambda=1}^{k} \alpha_\lambda v_\lambda \;\middle|\; \alpha_1, \dots, \alpha_k \in [0,1] \right\}$$

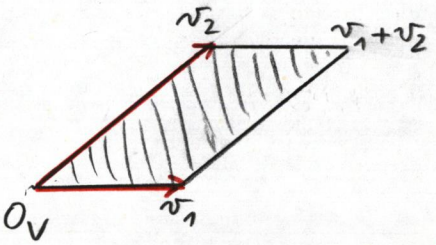
$$=: [0,1]v_1 + \dots + [0,1]v_k \subset \mathrm{Spann}\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$$

heißt das von $v_1, \dots, v_k$ aufgespannte k-Parallelotop

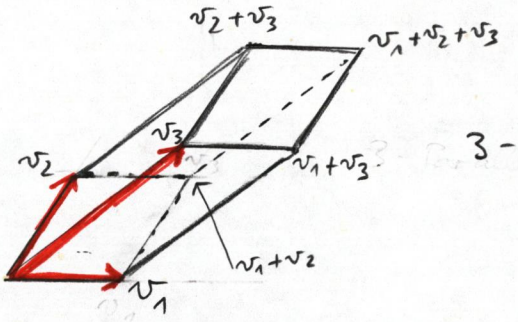
Beispiele $k=1$: $\mathrm{Par}(v_1) = [0,1]v_1$ ist die Verbindungsstrecke von 0_V und v_1.



$k=2$: $\mathrm{Par}(v_1, v_2) = [0,1]v_1 + [0,1]v_2$ ist das Parallelogramm mit den Ecken $0_V, v_1, v_2, v_1+v_2$



$k=3$: $\mathrm{Par}(v_1, v_2, v_3)$



3-Parallelotop

(ii) $$V_k(\mathrm{Par}(v_1, \dots, v_k)) := \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_k, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_k, v_k \rangle \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{\underbrace{G(v_1, \dots, v_k)}_{\geq 0 \text{ (vgl. 8.36)}}} \qquad \geq 0$$

heißt das (nichtorientierte) k-dim. Volumen des von $v_1, \dots, v_k$ aufgespannten k-Parallelotops

Beispiele $k=1$: $V_1(\mathrm{Par}(v_1)) = \sqrt{\langle v_1, v_1\rangle} = \|v_1\|$

Länge der Strecke $\mathrm{Par}(v_1)$.

$k=2$: $V_2(\mathrm{Par}(v_1,v_2)) = \sqrt{\det\begin{pmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle \\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle\end{pmatrix}}$

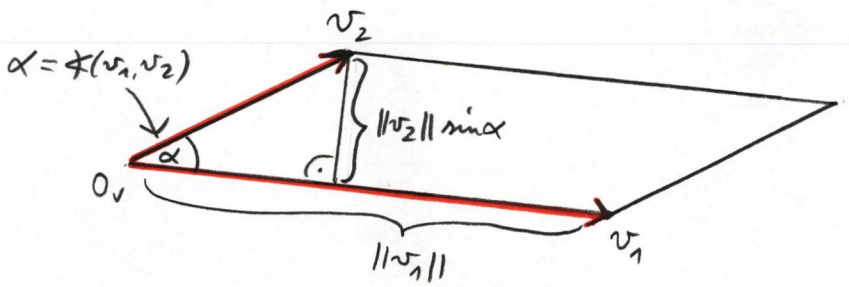
$$= \sqrt{\|v_1\|^2\|v_2\|^2 - \underbrace{\langle v_1,v_2\rangle^2}_{\overset{8.35\,(*)}{=}\|v_1\|^2\|v_2\|^2\cos^2(\sphericalangle(v_1,v_2))}}$$

, falls $v_1, v_2 \in V\setminus\{0\}$

$$= \|v_1\|\,\|v_2\|\,\underbrace{\sin(\sphericalangle(v_1,v_2))}_{\geq 0,\ \text{da } \sphericalangle(v_1,v_2)\in[0,\pi]}$$

„Länge der Grundseite" — „Länge der Höhe"

Flächeninhalt des Parallelogramms $\mathrm{Par}(v_1,v_2)$



8.38 Satz (Eigenschaften der k-dim. Volumens von k-Parallelotopen)

Sei V ein n-dim. euklidischer Vektorraum und seien $v_1, \dots, v_k \in V$ ($k \in \{1, \dots, n\}$). Dann gilt:

(i) $V_k(\mathrm{Par}(v_1, \dots, v_k)) = 0 \iff v_1, \dots, v_k$ linear abhängig.

(ii) $\forall_{\sigma \in S_k} V_k(\mathrm{Par}(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})) = V_k(\mathrm{Par}(v_1, \dots, v_k))$.

(iii) $v_1, \dots, v_k$ orthogonal $\Rightarrow V_k(\mathrm{Par}(v_1, \dots, v_k)) = \|v_1\| \cdot \dots \cdot \|v_k\|$

(iv) Sind $u_1, \dots, u_k \in V$ orthonormal und $v_1, \dots, v_k \in \mathrm{Span}\{u_1, \dots, u_k\}$, so gilt

$$V_k(\mathrm{Par}(v_1, \dots, v_k)) = \left| \det \begin{pmatrix} \langle v_1, u_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, u_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_k, u_1 \rangle & \cdots & \langle v_k, u_k \rangle \end{pmatrix} \right|$$

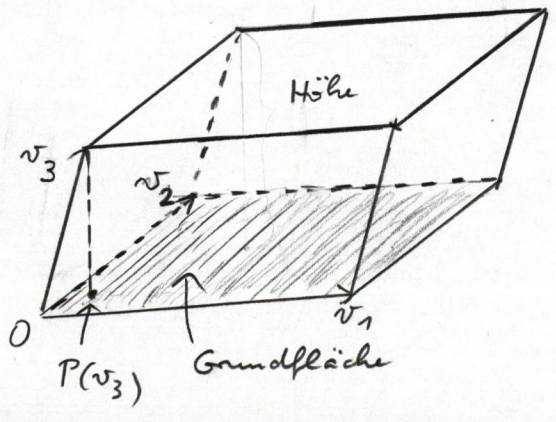
Im Spezialfall $V = \mathbb{R}^k$, $(u_1, \dots, u_k) = (e_1, \dots, e_k)$ besagt dies:

$$V_k(\mathrm{Par}(v_1, \dots, v_k)) = \left| \det \begin{pmatrix} v_1 & \\ \vdots & \\ v_k & \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_k \\ | & & | \end{pmatrix} \right|$$

$$=: |\det(v_1, \dots, v_k)|$$

(v) Ist $k \geq 2$ und bezeichnet $P \in \mathrm{End}(V)$ die Orthogonalprojektion von V auf $\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$, so gilt

$$V_k(\mathrm{Par}(v_1, \dots, v_k)) = \underbrace{\|v_k - P(v_k)\|}_{\text{„Länge der Höhe"}} \underbrace{V_{k-1}(\mathrm{Par}(v_1, \dots, v_{k-1}))}_{\text{„Grundfläche"}} \quad (*)$$



Beweis: **Zu (i)** klar nach 8.36 (*).

Zu (ii):

$$V_k\left(\mathrm{Par}(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})\right)^2 = \det\begin{pmatrix} \langle v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(1)}\rangle & \dots & \langle v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(k)}\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_{\sigma(k)}, v_{\sigma(1)}\rangle & \dots & \langle v_{\sigma(k)}, v_{\sigma(k)}\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{sign}(\sigma)\, \det\begin{pmatrix} \langle v_{\sigma(1)}, v_1\rangle & \dots & \langle v_{\sigma(1)}, v_k\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_{\sigma(k)}, v_1\rangle & \dots & \langle v_{\sigma(k)}, v_k\rangle \end{pmatrix}$$

↑ det alternierend in den Spaltenvektoren

$$= \underbrace{\mathrm{sign}(\sigma)^2}_{=1}\, \det\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \dots & \langle v_1, v_k\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_k, v_1\rangle & \dots & \langle v_k, v_k\rangle \end{pmatrix} = V_k\left(\mathrm{Par}(v_1,\dots,v_k)\right)^2$$

↑ det alternierend in den Zeilenvektoren

Hieraus folgt (ii) durch Wurzelziehen.

Zu (iii):

$$V_k\left(\mathrm{Par}(v_1,\dots,v_k)\right)^2 = \det\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \langle v_k, v_k\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \left(\|v_1\| \cdot \dots \cdot \|v_k\|\right)^2, \text{ dann Wurzelziehen.}$$

Zu (iv): klar nach Zusatz zu 8.36.

Zu (v): **1. Fall:** $v_1,\dots,v_{k-1}$ linear abhängig

Dann sind erst recht auch $v_1,\dots,v_k$ linear abhängig, also sind beide Seiten von (*) gleich 0 nach (i).

2. Fall: $v_1,\dots,v_{k-1}$ lin. unabhängig und $v_1,\dots,v_k$ linear abhängig.

Dann gilt $v_k \in \mathrm{Spann}\{v_1,\dots,v_{k-1}\}$, also $P(v_k) = v_k$,

$\|v_k - P(v_k)\| = 0$, also sind wiederum beide Seiten von (*) gleich 0.

3. Fall: $v_1,\dots,v_k$ linear unabhängig (insbes. $v_1,\dots,v_{k-1}$ linear unabh.).

Sei dann $(u_1, \dots, u_k)$ die ONB von $\operatorname{Spann}\{v_1, \dots, v_k\}$, die aus $(v_1, \dots, v_k)$ durch Gram-Schmidt-Orthonormalisierung entsteht

Dann folgt $u_k \in \operatorname{Spann}\{u_1, \dots, u_{k-1}\}^\perp = \operatorname{Spann}\{v_1, \dots, v_{k-1}\}^\perp$, also

$$\langle v_j, u_k \rangle = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, k-1 \,,$$

folglich

$$V_k(\operatorname{Par}(v_1, \dots, v_k)) \underset{(iv)}{=} \left| \det \begin{pmatrix} \langle v_1, u_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, u_{k-1} \rangle & \overbrace{\langle v_1, u_k \rangle}^{=0} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle v_{k-1}, u_1 \rangle & \cdots & \langle v_{k-1}, u_{k-1} \rangle & \overbrace{\langle v_{k-1}, u_k \rangle}^{=0} \\ \langle v_k, u_1 \rangle & & \langle v_k, u_{k-1} & \langle v_k, u_k \rangle \end{pmatrix} \right|$$

$$= \underbrace{|\langle v_k, u_k \rangle|}_{\| (*) \text{ s.u.}} \cdot \underbrace{\left| \det \begin{pmatrix} \langle v_1, u_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, u_{k-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_{k-1}, u_1 \rangle & \cdots & \langle v_{k-1}, u_{k-1} \rangle \end{pmatrix} \right|}_{\| \text{ nach (iv) und wegen } v_1, \dots, v_{k-1} \in \operatorname{Spann}\{u_1, \dots, u_{k-1}\}}$$

Entwicklung nach k. Spalte

$\| v_k - P(v_k) \|$ $\qquad$ $\operatorname{Vol}(\operatorname{Par}(v_1, \dots, v_{k-1}))$

Zu (*): $\quad v_k = \underbrace{\langle v_k, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v_k, u_{k-1} \rangle u_{k-1}}_{= P(v_k)} + \langle v_k, u_k \rangle u_k$

$$\| v_k - P(v_k) \| = \| \langle v_k, u_k \rangle u_k \| = |\langle v_k, u_k \rangle| \underbrace{\| u_k \|}_{=1}$$

q.e.d

8.39

8.7.03
(21.)

8.39 (Orientierung eines endlich-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraums)

Sei V ein n-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wir setzen:

$$N := \{ \mathcal{A} \mid \underset{\| }{\mathcal{A}} \text{ geordnete Basis von } V \} \subset V^n$$
$$(v_1, \dots, v_n)$$

(i) Def.: Wir definieren für $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in N$:

$\mathcal{A}$ gleichorientiert zu $\mathcal{B}$ $:\Leftrightarrow \det \underbrace{M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)}_{\text{heißt die Matrix des Basiswechsels von } \mathcal{A} \text{ nach } \mathcal{B}} > 0$,

$\in GL(n, \mathbb{R})$, da id_V bijektiv

$\mathcal{A}$ entgegengesetzt orientiert zu $\mathcal{B}$ $:\Leftrightarrow \det M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) < 0$.

Dann gilt für $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \in N$:

$$\mathcal{A}_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{gleichorientiert} \\ \text{gleichorientiert} \\ \text{entgegeng. orient.} \\ \text{entgegeng. orient.} \end{array} \right\} \text{zu } \mathcal{A}_2 \ \wedge \ \mathcal{A}_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{gleichorientiert} \\ \text{entgegeng. orient} \\ \text{gleichorientiert} \\ \text{entgegeng. orient} \end{array} \right\} \text{zu } \mathcal{A}_3$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{gleichorientiert} \\ \text{entgegeng. orient.} \\ \text{entgegeng. orient.} \\ \text{gleichorientiert} \end{array} \right\} \text{zu } \mathcal{A}_3 \qquad (1)$$

[Denn wegen $M_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3}(\mathrm{id}) \underset{6.20}{=} M_{\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3}(\mathrm{id}) \, M_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathrm{id})$ gilt

$$\det M_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(\mathrm{id}) \cdot \det M_{\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3}(\mathrm{id}) = \det M_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3}(\mathrm{id})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} >0 \\ >0 \\ <0 \\ <0 \end{array} \right\} \qquad \left\{ \begin{array}{l} >0 \\ <0 \\ >0 \\ <0 \end{array} \right\} \qquad \left\{ \begin{array}{l} >0 \\ <0 \\ <0 \\ >0 \end{array} \right\} \ ]$$

(ii) **Satz**

"... gleichorientiert zu ..." (vgl. 2.19) ist eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge N aller geordneten Basen von V.

Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen bzgl. dieser Äquivalenzrelation $\sim$

Def. Jede dieser beiden Äquivalenzklassen heißt eine Orientierung von V.

[**Beweis des Satzes:** 1) $\sim$ ist reflexiv, d.h. $\forall_{\mathcal{A}\in N}\ \mathcal{A}\sim\mathcal{A}$,

wegen $\det M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(id) = \det E_n = 1 > 0$.

$\sim$ ist symmetrisch, d.h. $\forall_{\mathcal{A},\mathcal{B}\in N}(\mathcal{A}\sim\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}\sim\mathcal{A})$,

denn aus $\det M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(id) > 0$ folgt

$$\det \underbrace{M_{\mathcal{B}\mathcal{A}}(id)}_{M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(id)^{-1}} = \frac{1}{\det M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(id)} > 0.$$

$\sim$ ist transitiv, d.h. $\forall_{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3\in N}\left(\mathcal{A}_1\sim\mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{A}_2\sim\mathcal{A}_3 \Rightarrow \mathcal{A}_1\sim\mathcal{A}_3\right)$,

nach (1) (oberster der 4 Fälle).

Damit ist gezeigt, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

2.) Sei $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in N$. Dann folgt, daß auch $\mathcal{A}' := (-v_1, v_2, \ldots, v_n) \in N$ und $\mathcal{A}'$ ist entgegengesetzt orientiert zu $\mathcal{A}$ wegen

$$M_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}(id) = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ also } \det M_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}(id) = -1 < 0.$$

$\in GL(n,\mathbb{R})$

Sei $\mathcal{B}\in N$ beliebig. Dann gilt $\det M_{\mathcal{B}\mathcal{A}}(id) \neq 0$. Im Falle $\det M_{\mathcal{B}\mathcal{A}}(id) > 0$ ist $\mathcal{B}$ gleichorientiert zu $\mathcal{A}$. Im Falle

$\det M_{\mathcal{BA}}(id) < 0$ ist $\mathcal{B}$ entgegengesetzt orientiert zu $\mathcal{A}$, ferner ist (s.o.) $\mathcal{A}$ entgegengesetzt orientiert zu $\mathcal{A}'$, also ist nach (1) (unterster der 4 Fälle) $\mathcal{B}$ gleichorientiert zu $\mathcal{A}'$

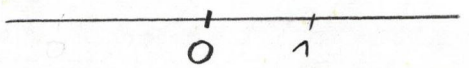
Damit gezeigt: Jeder $\mathcal{B} \in N$ ist entweder gleichorientiert zu $\mathcal{A}$ oder gleichorientiert zu $\mathcal{A}'$, also gibt es genau zwei Äquivalenzklassen.]

Eine Orientierung O von V ist also eine Menge von geordneten Basen von V, genauer eine Äquivalenzklasse von geordneten Basen von V bzgl. $\sim$ (... gleichorientiert zu ...)

(iii) Beispiele

$n=1$: Eine Orientierung eines 1-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraums ist eine „Richtung":

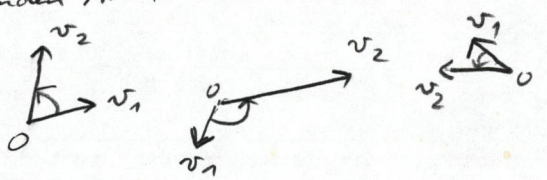
$\boxed{V=\mathbb{R}}$:



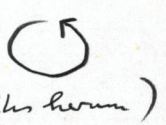
1. Orientierung: Die 1-elementigen Teilmengen von $\mathbb{R}_+$ „Richtung": ⟶
2. " : " " " " $\mathbb{R}_-$ ⟵

$n=2$: Eine Orientierung eines 2-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraums ist ein „Drehsinn":

$\boxed{V=\mathbb{R}^2}$ 1. Orientierung (= links-Drehsinn): Alle (geordneten) Basen (v_1, v_2) von $\mathbb{R}^2$ der folgenden Art:

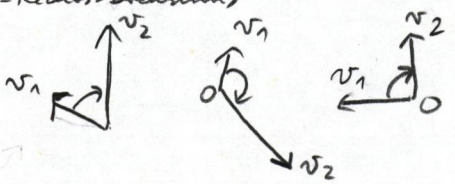


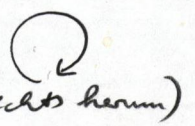
„Drehsinn":



(links herum)

2. Orientierung (= Rechts-Drehsinn): Alle Basen (v_1, v_2) von $\mathbb{R}^2$ der folgenden Art:





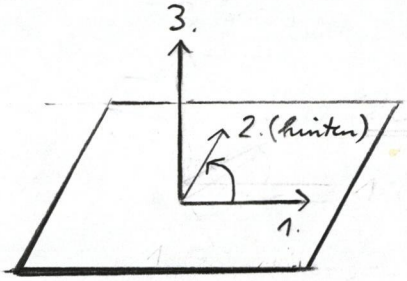
(rechts herum)

Die kleinste Drehung um 0, die $\mathbb{R}_+ v_1$ in $\mathbb{R}_+ v_2$ überführt, ist bei der $\begin{Bmatrix}1.\\2.\end{Bmatrix}$ Orientierung eine Drehung $\begin{Bmatrix}\text{links}\\\text{rechts}\end{Bmatrix}$ herum

$n = 3$: Eine Orientierung eines 3-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraums ist ein „Schraubungssinn"

$\boxed{V = \mathbb{R}^3}$ $\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}$ Orientierung : Alle Basen (v_1, v_2, v_3), die gleichorientiert sind zu (Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger)
1. Finger 2. Finger 3. Finger

der $\left\{\begin{matrix}\text{rechten}\\\text{linken}\end{matrix}\right\}$ Hand

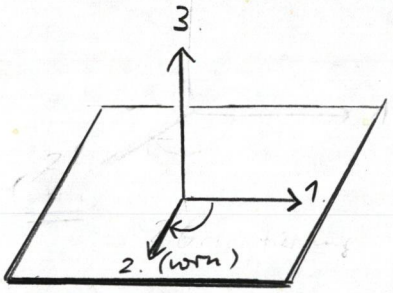


1. Orientierung
(= Rechts-Schraubungssinn
= rechte Hand-Orientierung)

„Schraubungssinn"



(Rechtsschraube)



2. Orientierung
(= Links-Schraubungssinn
= linke Hand-Orientierung)



(Linksschraube)

Die in Deutschland üblichen Schrauben sind vorw. Rechtsschrauben, d.h. ihre Gewinde sind Rechtsschrauben.

Die $\left\{\begin{matrix}\text{Rechtsschrauben}\\\text{Linksschrauben}\end{matrix}\right\}$ sind dadurch charakterisiert, daß sie sich beim Drehen des Schraubenziehers $\left\{\begin{matrix}\text{rechts herum}\\\text{links herum}\end{matrix}\right\}$ nach vorne (weg vom Schraubenzieher) bewegen.

Der Zusammenhang zwischen $\left\{\begin{matrix}\text{Rechts}\\\text{links}\end{matrix}\right\}$-Schraubungssinn und $\left\{\begin{matrix}\text{rechte}\\\text{linke}\end{matrix}\right\}$ Hand-Orientierung ist aus den obigen Skizzen ersichtlich.

8.40

Def: (i) Ein *n-dim. orientierter $\mathbb{R}$-Vektorraum* ist ein n-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit einer vorgegebenen Orientierung O von V, (genauer: ein Paar (V, O), bestehend aus .....) O heißt dann *die Orientierung von V*.

Eine geordnete Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ von V heißt dann *positiv orientiert*, falls $\mathcal{A} \in O$ und *negativ orientiert*, falls $\mathcal{A} \notin O$.

(ii) Sei V ein n-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V.
Dann existiert genau eine Orientierung O von V mit $\mathcal{A} \in O$, (nämlich O = Menge aller zu $\mathcal{A}$ gleichorientierten Basen $\mathcal{B}$ von V). Dies O heißt *die durch $\mathcal{A}$ induzierte Orientierung von V*.

(iii) Die *kanonische Orientierung von $\mathbb{R}^n$* ist definiert als die Orientierung, die i.S. von (ii) durch die kanonische Basis $(e_1, \dots, e_n)$ von $\mathbb{R}^n$ induziert wird.
Verabredung: Wir betrachten im folgenden $\mathbb{R}^n$ stets als orientierten n-dim $\mathbb{R}$-Vektorraum mit dieser kanonischen Orientierung. Die positiv (bzw. negativ) orientierten Basen von $\mathbb{R}^n$ sind also die zu $(e_1, \dots, e_n)$ gleichorientierten (bzw. entgegengesetzt orientierten) Basen von $\mathbb{R}^n$.

Hier steht nicht allgemeiner $k \in \{1,\dots,n\}$ wie in 8.37(ii)!

8.41 Def.: Sei V ein n-dim. euklidischer orientierter Vektorraum und seien $v_1,\dots,v_n \in V$. Dann heißt

$$V_n^0(\mathrm{Par}(v_1,\dots,v_n)) := \begin{cases} V_n(\mathrm{Par}(v_1,\dots,v_n)), & \text{falls } (v_1,\dots,v_n) \text{ positiv orientierte Basis von } V \\ -V_n(\mathrm{Par}(v_1,\dots,v_n)) & \text{sonst} \end{cases}$$

das orientierte n-dim. Volumen des von $v_1,\dots,v_n$ aufgespannten n-Parallelotops.

Satz Sei V ein n-dim. euklidischer orientierter Vektorraum und seien $v_1,\dots,v_n \in V$. Dann folgt:

(i) Ist $\underbrace{(u_1,\dots,u_n)}_{=:\mathcal{A}}$ eine positiv orientierte ONB von V, so gilt

$$V_n^0(\mathrm{Par}(v_1,\dots,v_n)) = \det\begin{pmatrix} \langle v_1,u_1\rangle & \cdots & \langle v_1,u_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n,u_1\rangle & \cdots & \langle v_n,u_n\rangle \end{pmatrix} \quad (*)$$

Im Spezialfall $V=\mathbb{R}^n$, $(u_1,\dots,u_n)=(e_1,\dots,e_n)$ besagt dies:

$$\boxed{V_n^0(\mathrm{Par}(v_1,\dots,v_n)) = \det\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det(v_1,\dots,v_n)} \quad (**)$$

Dies ist die "geometrische Charakterisierung" der Determinante von Matrizen $\in M_n(\mathbb{R})$

11.7.03 (22.)

(ii) $(v_1,\dots,v_n)$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ orientierte Basis von V

$$\iff V_n^0(\mathrm{Par}(v_1,\dots,v_n)) \left\{\begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix}\right\}.$$

(iii) $\forall_{\sigma\in S_n}\ V_n^0(\mathrm{Par}(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)})) = \mathrm{sign}(\sigma)\, V_n^0(\mathrm{Par}(v_1,\dots,v_n))$.

(iv) $\forall_{f\in \mathrm{End}(V)}\ V_n^0(\mathrm{Par}(f(v_1),\dots,f(v_n))) = \det(f)\, V_n^0(\mathrm{Par}(v_1,\dots,v_n))$

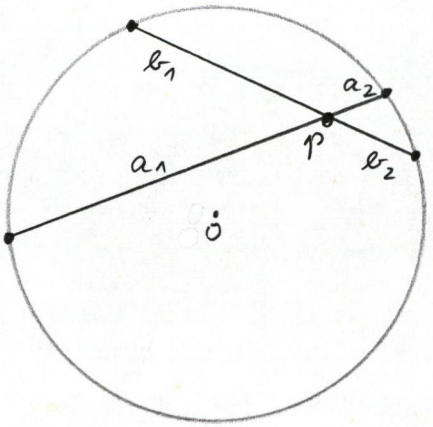
Beweis: vgl. Übungen (= ü 122).

8.42 Beispiel (Die beiden Sehnensätze)

Sei $r \in \mathbb{R}_+$ und sei $S \subset \mathbb{R}^2$ der Kreis vom Radius r um 0 im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

(i) (Zwei-Sehnen-Satz)

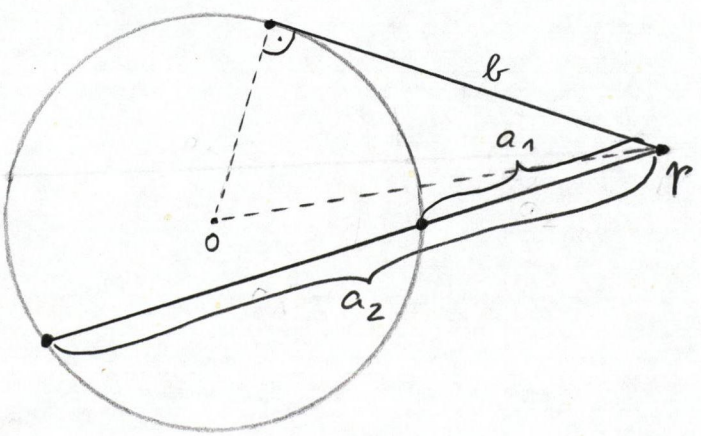
Sei $p \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt im Inneren des Kreises S, d.h. $|p| < r$. Dann hat für jede Sehne durch p das Produkt der Sehnenabschnitte den gleichen Wert $(= r^2 - |p|^2)$.



$$a_1 a_2 = b_1 b_2 = (r + |p|)(r - |p|)$$
$$= r^2 - |p|^2 = \big||p|^2 + r^2\big|$$

(ii) (Sehnen-Tangenten-Satz)

Sei $p \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt im Äußeren des Kreises S, d.h. $|p| > r$. Dann ist für jede Gerade durch p, die den Kreis S schneidet, das Produkt der Sehnenabschnitte gleich dem Quadrat des Tangentenabschnitts einer Gerade, die den Kreis S tangiert $(= |p|^2 - r^2)$.



$$a_1 a_2 = b^2 = |p|^2 - r^2$$
$$= \big||p|^2 - r^2\big|.$$

Beweis (von (i) und (ii)):

Sei $p \in \mathbb{R}^2$ mit $p \notin S$, d.h. $|p| \neq r$, und sei $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| = 1$.

Sei $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ def. durch $\forall_{t \in \mathbb{R}} \quad \gamma(t) := p + t v$.

Dann folgt:

$$\forall_{t \in \mathbb{R}} \quad \gamma(t) \in S \iff \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = r^2$$

$$\iff \underbrace{\langle p, p \rangle}_{= |p|^2} + 2t \langle p, v \rangle + t^2 \underbrace{\langle v, v \rangle}_{= 1} = r^2$$

$$\iff t^2 + 2 \langle p, v \rangle t + (|p|^2 - r^2) = 0$$

$$\iff t = -\langle p, v \rangle \{\pm\} \sqrt{\underbrace{\langle p, v \rangle^2 - (|p|^2 - r^2)}_{\geq 0}} =: \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix}$$

Im Falle $\langle p, v \rangle^2 - (|p|^2 - r^2) \geq 0$ gilt

$$t^2 + 2 \langle p, v \rangle t + (|p|^2 - r^2) = (t - t_1)(t - t_2),$$

nämlich

$$t_1 t_2 = |p|^2 - r^2,$$

und daher (wegen $\forall_{t \in \mathbb{R}} \; |\gamma(t) - p| = |t v| = |t| \underbrace{|v|}_{= 1} = |t|$):

$$\underbrace{|\gamma(t_1) - p|}_{|t_1|} \underbrace{|\gamma(t_2) - p|}_{|t_2|} = |p|^2 - r^2| \qquad (*)$$

Genau im Falle $t_1 = t_2$ tangiert die Gerade $\gamma(\mathbb{R})$ den Kreis S.

Aus $(*)$ folgen sofort (i) und (ii), q.e.d.

8.43 Def.: Sei V ein 2-dim. orientierter euklidischer Vektorraum und seien $v, w \in V \setminus \{0\}$. Dann heißt

$$\sphericalangle^\circ(v,w) := \begin{cases} \sphericalangle(v,w) \in [0,\pi], & \text{falls } (v,w) \text{ positiv orientierte Basis von } V \text{ oder } v, w \text{ linear abhängig} \\ -\sphericalangle(v,w) \in]-\pi,0[, & \text{falls } (v,w) \text{ negativ orientierte Basis von } V \end{cases}$$

$$\in]-\pi, \pi]$$

der orientierte Winkel zwischen v und v.

Satz Sei V ein 2-dim. orientierter euklidischer Vektorraum und seien $v, w \in V \setminus \{0\}$. Dann gilt:

(i) $\quad |\sphericalangle^\circ(v,w)| = \sphericalangle(v,w)$,

(ii) $\quad \underbrace{\sphericalangle(v,w) \neq \pi}_{\text{d.h. } v, w \text{ nicht negativ-proportional}} \Rightarrow \sphericalangle^\circ(w,v) = -\sphericalangle^\circ(v,w)$,

(iii) $\quad \cos \sphericalangle^\circ(v,w) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \, \|w\|}$ und

$$\sin \sphericalangle^\circ(v,w) = \frac{V_2^\circ(\mathrm{Par}(v,w))}{\|v\| \, \|w\|}$$

(iv) Im Spezialfall $V = \mathbb{R}^2 (= \mathbb{C})$, $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2)$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} \cos \sphericalangle^\circ(v,w) &= \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}, \\ \sin \sphericalangle^\circ(v,w) &= \frac{\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$e^{i \sphericalangle^\circ(v,w)} = \frac{\frac{w}{|w|}}{\frac{v}{|v|}}, \quad (2)$$

$$\forall_{\alpha \in]-\pi,\pi]} \; \sphericalangle^\circ(1, e^{i\alpha}) = \alpha, \quad (3)$$

$$\forall_{a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \; \sphericalangle^\circ(av, aw) = \sphericalangle^\circ(v,w) \quad (4)$$

[Beweis: (i) ist klar nach Def.

Zu (ii): Gelte $\sphericalangle(v,w) \neq \pi$

Falls v,w linear abhängig, so $\sphericalangle(v,w)=0$, also gilt (ii) nach (i)

Falls (v,w) $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$-orientierte Basis von V, so (w,v) $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$-orientierte Basis von V und

$$\sphericalangle^\circ(w,v) = \left\{\begin{matrix}-\\+\end{matrix}\right\} \sphericalangle(w,v) = \left\{\begin{matrix}-\\+\end{matrix}\right\} \sphericalangle(v,w) = -\sphericalangle^\circ(v,w)$$

Zu (iii) $\cos \sphericalangle^\circ(v,w) \underset{(i)}{=} \cos(\pm \sphericalangle(v,w)) = \cos \sphericalangle(v,w) = \dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$

$$\left(\sin \sphericalangle^\circ(v,w)\right)^2 = 1 - \left(\cos \sphericalangle^\circ(v,w)\right)^2 = 1 - \frac{\langle v,w\rangle^2}{\|v\|^2\|w\|^2}$$

$$= \frac{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}{\|v\|^2\|w\|^2} = \frac{\left(V_2(\mathrm{Par}(v,w))\right)^2}{\|v\|^2\|w\|^2}$$

$$= \left(\frac{V_2^\circ(\mathrm{Par}(v,w))}{\|v\|\,\|w\|}\right)^2$$

Falls v,w linear abhängig, so $\sphericalangle^\circ(v,w) \in \{0,\pi\}$, also $\sin \sphericalangle^\circ(v,w)=0$ und auch $V_2^\circ(\mathrm{Par}(v,w))=0$.

Falls (v,w) $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$-orientierte Basis von V, so $\sphericalangle^\circ(v,w) \in \left\{\begin{matrix}]0,\pi[\\]-\pi,0[\end{matrix}\right\}$, also $\sin \sphericalangle^\circ(v,w) \left\{\begin{matrix}>0\\<0\end{matrix}\right\}$ und auch $V_2^\circ(\mathrm{Par}(v,w)) \left\{\begin{matrix}>0\\<0\end{matrix}\right\}$.

Hieraus folgt auch die zweite Aussage von (iii).

Zu (iv) (1) folgt als Spezialfall aus (iii)

Zu (2): Falls v,w $\left\{\begin{matrix}\text{positiv proportional}\\\text{negativ proportional}\end{matrix}\right\}$, so $\sphericalangle^\circ(v,w) \left\{\begin{matrix}=0\\=\pi\end{matrix}\right\}$,

also $e^{i\sphericalangle^\circ(v,w)} = \left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\} 1 = \pm$ S. von (ii)

Falls (v,w) $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$-orientierte Basis von V, so $\det(v,w) \left\{\begin{matrix}>0\\<0\end{matrix}\right\}$,

folglich nach Ü 120: $\dfrac{e^{i\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}\sphericalangle(v,w)}}{e^{i\sphericalangle^\circ(v,w)}} = \dfrac{w/|w|}{v/|v|}$

Zu (3): $e^{i \sphericalangle^\circ(1, e^{i\alpha})} \underset{(2)}{=} e^{i\alpha}$, also gilt (3) wegen $\sphericalangle^\circ(1, e^{i\alpha}),\ \alpha \in]-\pi, \pi]$

Zu (4): klar nach (2) q.e.d.]

8.44 Def. Sei V ein 3-dim. euklidischer orientierter Vektorraum

(i) Es existiert genau eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow V$$
$$(a, b) \longmapsto a \times b$$

mit

$$\forall_{a,b,c \in V} \boxed{\langle a \times b, c \rangle = V_3^\circ(\mathrm{Par}(a, b, c))} \qquad (*)$$

(vgl. 8.16 und 8.41 (*))
$\Rightarrow$ r.S. von (*) ist $\mathbb{R}$-linear in c (für feste a, b)

„$\times$" heißt das Vektorprodukt von V, $a \times b \in V$ heißt das Vektorprodukt von a und b

15.7.03 (23.) (Andere Bezeichnung: „äußeres Produkt" im Gegensatz zum Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$, das dann „inneres Produkt" genannt wird)

(ii) Sei (u_1, u_2, u_3) eine positiv orientierte ONB von V

Dann gilt, wenn $a = \sum_{i=1}^{3} \overbrace{a_i}^{\langle a, u_i \rangle} u_i$, $b = \sum_{i=1}^{3} \overbrace{b_i}^{\langle b, u_i \rangle} u_i$:

$$\boxed{a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2) u_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) u_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) u_3} \qquad (1)$$

$$=: \sum_{\substack{i=1 \\ \text{Indizes} \\ \text{modulo } 3}}^{3} \det \begin{pmatrix} a_{i+1} & a_{i+2} \\ b_{i+1} & b_{i+2} \end{pmatrix} u_i$$

Im Spezialfall $\boxed{V = \mathbb{R}^3}$ (mit kanon. Skalarprodukt und kanon. Orientierung) und $(u_1, u_2, u_3) = (e_1, e_2, e_3)$, $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ besagen (*) und (1):

$$\boxed{\langle a \times b, c \rangle} = \det \begin{pmatrix} a & — \\ b & — \\ c & — \end{pmatrix} = \boxed{\det(a, b, c)} \qquad (2)$$

und

$$\boxed{a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)} \quad (3)$$

Merkregel für (3):

$$a \times b = \text{„}\det\text{“}\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

↑ Entwicklung nach 1. Zeile oder nach „Sarrus-Regel“

(Z Vorsicht: Die „Determinante“ in (4) enthält als Eintragungen sowohl Skalare $\in \mathbb{R}$ als auch Vektoren $\in \mathbb{R}^3$)

[Zu (1): $\langle a \times b, u_1 \rangle \underset{(*)}{=} V_3^0(\mathrm{Par}(a, b, u_1))$

$\underset{8.41(*)}{=} \det \begin{pmatrix} \langle a, u_1 \rangle & \langle a, u_2 \rangle & \langle a, u_3 \rangle \\ \langle b, u_1 \rangle & \langle b, u_2 \rangle & \langle b, u_3 \rangle \\ \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \langle u_1, u_3 \rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= a_2 b_3 - a_3 b_2$

Völlig analog folgt $\langle a \times b, u_2 \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = a_3 b_1 - a_1 b_3$

und $\langle a \times b, u_3 \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

Zu (2): klar nach (*) und 8.41 (**).

(3) und (4) folgen sofort aus (1)]

$\boxed{8.45}$ $\boxed{\text{Satz}}$ (Eigenschaften des Vektorprodukts)

Sei V ein 3-dim. euklidischer orientierter Vektorraum und seien $a, b, c \in V$. Dann folgt.

(i) $\times : V \times V \longrightarrow V$ ist $\mathbb{R}$-bilinear

(ii) $b \times a = -(a \times b)$, d.h. $\times$ ist „schiefsymmetrisch", insbesondere $a \times a = 0$.

(iii) $\langle a \times b, c \rangle = \langle b \times c, a \rangle = \langle c \times a, b \rangle$
insbesondere $\langle a \times b, a \rangle = \langle a \times b, b \rangle = 0$

(iv) $a \times b = 0 \iff a, b$ linear abhängig.

(v) $\|a \times b\| = V_2(\mathrm{Par}(a,b)) \underset{\text{klar}}{=} \sqrt{\langle a,a\rangle\langle b,b\rangle - \langle a,b\rangle^2}$

(vi) a, b linear unabhängig $\Rightarrow a \times b \in \underbrace{\mathrm{Spann}\{a,b\}^{\perp}}_{\text{1-dim.}} \setminus \{0\}$
und $(a, b, a \times b)$ positiv orientierte Basis von V

(vii) (u_1, u_2, u_3) positiv orientierte ONB von V

$\Rightarrow u_1 \times u_2 = u_3, \quad u_2 \times u_3 = u_1, \quad u_3 \times u_1 = u_2$

(d.h. genau $\forall_{i \in \{1,2,3\}} \; u_i \times u_{i+1} = u_{i+2}$
Indizes modulo 3)

d.h. $u_4 = u_1$,
$u_5 = u_2$

(viii) $a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$

„Grassmann-Identität"

(ix) $a \times (b \times c) \underbrace{+ b \times (c \times a) + c \times (a \times b)}_{+ \text{ zyklisch } \left(\left(\begin{smallmatrix} a \leftarrow c \\ \searrow \uparrow \\ b \end{smallmatrix}\right)\right)} = 0$

„Jacobi-Identität"

Bemerkung: Die Jacobi-Identität mißt die Abweichung von $\times$ von der Assoziativität wegen

$$a \times (b \times c) = \underbrace{(a \times b) \times c}_{\overset{(ii)}{=} -(c \times (a \times b))} - b \times (c \times a).$$

Beweis: Zu (i), (ii): klar nach 8.44(1)

Zu (iii): $\langle a \times b, c \rangle = V_3^0(\mathrm{Par}(a,b,c)) \underset{8.41(iii)}{=} V_3^0(\mathrm{Par}(b,c,a))$

$= \langle b \times c, a \rangle$,

also im Falle $c = b$:

$$\langle a \times b, b \rangle = \underbrace{\langle b \times b, a \rangle}_{=0 \ (ii)} \underset{(i)}{=} 0$$

Rest analog.

Zu (iv): Sei (u_1, u_2, u_3) eine positiv orientierte ONB von V und sei $a = \sum a_i u_i$, $b = \sum b_i u_i$. Dann folgt:

$$a \times b = 0 \iff a_1 b_2 = a_2 b_1 \wedge a_1 b_3 = a_3 b_1 \wedge a_2 b_3 = a_3 b_2$$

$\iff$ alle 2-reihigen Unterdeterminanten der Matrix $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ sind Null.

$\iff \mathrm{Rang} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \leq 1$

$\iff \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig

$\iff a, b \in V$ linear abhängig

Zu (v): Falls $a \times b = 0$, so sind beide Seiten von (v) gleich Null nach der C.S.-Ungleichung. Sei im folgenden $a \times b \neq 0$. Dann gilt

$$\|a \times b\|^2 = \langle a \times b, a \times b \rangle = \overbrace{V_3^0(\mathrm{Par}(a, b, a \times b))}^{\geq 0}$$

$$= V_3(\mathrm{Par}(a, b, a \times b)) \underset{(ii)}{\overset{8.37}{=}} \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle a,a \rangle & \langle a,b \rangle & \langle a, a \times b \rangle \\ \langle b,a \rangle & \langle b,b \rangle & \langle b, a \times b \rangle \\ \underbrace{\langle a \times b, a \rangle}_{=0 \ (iii)} & \underbrace{\langle a \times b, b \rangle}_{=0} & \underbrace{\langle a \times b, a \times b \rangle}_{= \|a \times b\|^2} \end{pmatrix}}$$

$$= \|a \times b\| \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle a,a \rangle & \langle a,b \rangle \\ \langle b,a \rangle & \langle b,b \rangle \end{pmatrix}} \underset{(ii)}{\overset{8.37}{=}} \|a \times b\| \, V_2(\mathrm{Par}(a,b)),$$

also folgt (v) wegen $\|a \times b\| \neq 0$.

Zu (vi): Seien a, b linear unabhängig. Dann folgt die 1. Beh. aus (iii), (iv) und die 2. Beh. folgt aus

$$0 < \underbrace{\langle a \times b, a \times b \rangle}_{\neq 0 \ (iv)} = V_3^0(\mathrm{Par}(a, b, a \times b)) \quad \text{und } 8.41(ii).$$

Zu (viii): klar nach 8.44 (1).

Zu (viii), (ix): vgl. Übungen (= Ü 126), q.e.d.

8.46 Bemerkung

Das Vektorprodukt in 8.44 besitzt folgende Verallgemeinerung:

Sei V ein n-dim. euklidischer orientierter Vektorraum, wobei $n \geq 2$.

Dann existiert genau eine Abbildung

$$\begin{aligned} V^{n-1} &\longrightarrow V \\ (a_1, \dots, a_{n-1}) &\longmapsto a_1 \times \dots \times a_{n-1} \end{aligned}$$

mit

$$\forall_{a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in V} \quad \langle a_1 \times \dots \times a_{n-1}, a_n \rangle = V_n^0(\mathrm{Par}(a_1, \dots, a_n)) \qquad (*)$$

(wiederum nach 8.16 und 8.41 (*)).

(*) heißt das verallgemeinerte Vektorprodukt auf V. Der Spezialfall $n = 3$ ist genau Def. 8.44. (Der Spezialfall $n = 2$, $V = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ist die Abbildung $x : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $a \mapsto ia$ $=: x(a)$, die Multiplikation mit i)

(*) hat analoge Eigenschaften wie im Spezialfall $n = 3$, z.B. gilt:

$$\|a_1 \times \dots \times a_{n-1}\| = V_{n-1}(\mathrm{Par}(a_1, \dots, a_{n-1}))$$

$a_1, \dots, a_{n-1}$ linear unabhängig $\Rightarrow a_1 \times \dots \times a_{n-1} \in \underbrace{\mathrm{Spann}\{a_1, \dots, a_{n-1}\}^{\perp}}_{1\text{-dim.}} - \{0\}$

und $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_1 \times \dots \times a_{n-1})$ positiv orientierte Basis von V.

8.47 Def.: Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Skalarprodukt und sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung.

(i) f heißt isometrisch $:\Leftrightarrow \forall_{v_1, v_2 \in V} \langle f(v_1), f(v_2)\rangle_W = \langle v_1, v_2\rangle_V$

$\overset{(*)\text{ s.u.}}{\Leftrightarrow} \forall_{v \in V} \|f(v)\|_W = \|v\|_V$, d.h. per def.: f ist „normerhaltend"

$\overset{(**)\text{ s.u.}}{\Leftrightarrow} \forall_{v_1, v_2 \in V} \|f(v_1) - f(v_2)\|_W = \|v_1 - v_2\|_V$, d.h. per def.: f ist „abstandserhaltend"

[Zu (*): „$\Rightarrow$" $\|f(v)\|^2 = \langle f(v), f(v)\rangle \underset{\text{Vor.}}{=} \langle v, v\rangle = \|v\|^2$

„$\Leftarrow$" 1. Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Dann folgt mit 8.5 a)

$$\langle f(v_1), f(v_2)\rangle = \frac{1}{4}\left(\|\underbrace{f(v_1)+f(v_2)}_{f(v_1+v_2)}\|^2 - \|\underbrace{f(v_1)-f(v_2)}_{f(v_1-v_2)}\|^2\right)$$

$$\underset{\text{Vor.}}{=} \frac{1}{4}\left(\|v_1+v_2\|^2 - \|v_1-v_2\|^2\right) = \langle v_1, v_2\rangle.$$

2. Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Dann folgt mit 8.5 b)

$$\langle f(v_1), f(v_2)\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k \|\underbrace{f(v_1) + i^k f(v_2)}_{f(v_1 + i^k v_2)}\|^2$$

$$\underset{\text{Vor.}}{=} \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k \|v_1 + i^k v_2\|^2 = \langle v_1, v_2\rangle.$$

Zu (**): „$\Rightarrow$": $\|f(v_1) - f(v_2)\| = \|f(v_1 - v_2)\| \underset{\text{Vor.}}{=} \|v_1 - v_2\|$.

„$\Leftarrow$": $\|f(v)\| = \|f(v) - \underbrace{f(0)}_{=0}\| \underset{\text{Vor.}}{=} \|v - 0\| = \|v\|$]

Bemerkung Jede isometrische lineare Abbildung $f: V \to W$ ist injektiv. (Denn aus $v \in V$, $f(v) = 0$ folgt $0 = \|f(v)\| \underset{\text{Vor.}}{=} \|v\|$, also $v = 0$)

(ii) f heißt eine (lineare) Isometrie, wenn $f: V \to W$ bijektiv (also ein Vektorraum-Isomorphismus) und isometrisch ist.

8.48 Satz Seien V, W zwei n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Skalarprodukt und sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende vier Aussagen paarweise äquivalent:

(1) f ist isometrisch.

(2) f ist eine (lineare) Isometrie.

(3) f bildet jede ONB von V auf eine ONB von W ab.

(4) f bildet (mind.) eine ONB von V auf eine ONB von W ab.

Beweis: „(1) $\Rightarrow$ (2)": Als isometrische lineare Abbildung ist f injektiv (nach der Bemerkung in 8.47), also ist f als injektive lineare Abbildung zwischen gleichdimensionalen Vektorräumen auch bijektiv.

„(2) $\Rightarrow$ (3)": Sei $(u_1, \dots, u_n)$ eine bel. ONB von V. Da f Vektorraum-Isomorphismus, so ist $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ eine Basis von W, und wegen

$$\forall_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \langle f(u_i), f(u_j) \rangle \underset{(2)}{=} \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$$

ist diese Basis eine ONB von W.

„(3) $\Rightarrow$ (4)": klar

„(4) $\Rightarrow$ (1)": Es existiert also eine ONB $(u_1, \dots, u_n)$ von V derart, daß $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ eine ONB von W ist. Dann folgt für alle $v, \tilde{v} \in V$, falls $v = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\alpha_i}_{\in \mathbb{K}} u_i$, $\tilde{v} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\beta_j}_{\in \mathbb{K}} u_j$:

$$\langle f(v), f(\tilde{v})\rangle = \Big\langle \sum_i \alpha_i f(u_i),\ \sum_j \beta_j f(u_j)\Big\rangle$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\beta}_j \underbrace{\langle f(u_i), f(u_j)\rangle}_{=\delta_{ij} = \langle u_i, u_j\rangle} = \Big\langle \sum_i \alpha_i u_i,\ \sum_j \beta_j u_j\Big\rangle = \langle v, \tilde{v}\rangle,$$

q.e.d.

8.49 Satz Seien V, W zwei endlich-dim. $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Skalarprodukt. Dann gilt:

V und W sind isometrisch (d.h. per def.: es existiert eine (lineare) Isometrie von V auf W)

$$\Longleftrightarrow \dim V = \dim W,$$

Beweis: „$\Rightarrow$": Es existiert also eine (lineare) Isometrie f von V auf W, also f insbesondere Vektorraum-Isomorphismus und folglich $\dim V = \dim W$.

„$\Leftarrow$": Gelte $\dim V = \dim W =: n$. Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine ONB von V und sei $(w_1, \dots, w_n)$ eine ONB von W. Es existiert genau eine lineare Abbildung $f: V \longrightarrow W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, n$.
Nach 8.48 „(4) $\Rightarrow$ (2)" ist f eine (lineare) Isometrie, q.e.d.

8.50 Def.: Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ isometrisch, d.h. genau (nach 8.48 „(1) $\Leftrightarrow$ (2)") eine (lineare) Isometrie, insbes. $f \in \underbrace{\mathrm{Aut}(V)}$
ist Gruppe, da mit f und g auch fg und f^{-1} zu $\mathrm{Aut}(V)$ gehören

f heißt im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ orthogonal und im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ unitär.

Ein $\left\{\begin{matrix}\text{orthogonaler}\\ \text{unitärer}\end{matrix}\right\}$ Endomorphismus ist also ein

isometrischer Endomorphismus (und damit sogar Automorphismus) eines endlich-dim. $\left\{\begin{matrix}\text{euklidischen}\\ \text{unitären}\end{matrix}\right\}$ Vektorraums.

Satz (i) Sei V ein n-dim. euklidischer Vektorraum. Dann ist

$$O(V) := \{ f \in \mathrm{Aut}(V) \mid f \text{ orthogonal (d.h. isometrisch)} \}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(V)$

$O(V)$ heißt die orthogonale Gruppe von V

(ii) Sei V ein n-dim. unitärer Vektorraum. Dann ist

$$U(V) := \{ f \in \mathrm{Aut}(V) \mid f \text{ unitär (d.h. isometrisch)} \}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(V)$.

$U(V)$ heißt die unitäre Gruppe von V.

Beweis: Seien $f, g \in \mathrm{Aut}(V)$ isometrisch. Dann folgt für alle $v_1, v_2 \in V$:

$$\langle fg(v_1), fg(v_2)\rangle = \langle g(v_1), g(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$$

und

$$\langle \vec{f}(v_1), \vec{f}(v_2)\rangle = \langle f\vec{f}(v_1), f\vec{f}(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle, \text{ q.e.d.}$$

8.51 Satz Sei V ein n-dim. $\left\{\begin{matrix}\text{euklidischer}\\ \text{unitärer}\end{matrix}\right\}$ Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:

$$f \text{ ist } \left\{\begin{matrix}\text{orthogonal}\\ \text{unitär}\end{matrix}\right\} \iff \underbrace{f^* f = f f^* = \mathrm{id}_V}_{\text{d.h. } f \in \mathrm{Aut}(V) \text{ und } f^* = \vec{f}}$$

Beweis: „$\Rightarrow$" f ist bijektiv (s.o.), also folgt

$$\forall_{v_1, v_2 \in V} \quad \langle f(v_1), v_2\rangle = \langle f(v_1), f(\vec{f}(v_2))\rangle \underset{\text{Vor.}}{=} \langle v_1, \vec{f}(v_2)\rangle,$$

$$\langle v_1, f^* v_2\rangle$$

d.h. $f^* = \bar{f}^{-1}$ und folglich $\underbrace{f f^*}_{f f^{-1}} = id_V = \underbrace{f^* f}_{\bar{f}^{-1} f}$

„$\Leftarrow$" $\forall_{v_1, v_2 \in V} \quad \langle f(v_1), f(v_2) \rangle = \langle v_1, f^* f(v_2) \rangle \underset{\text{Vor.}}{=} \langle v_1, v_2 \rangle$

q.e.d.

8.52 Def.:

(i) $A \in M_n(\mathbb{K})$ heißt <u>orthogonal</u> $:\Leftrightarrow \underbrace{A^t A = A A^t = E_n}_{\text{d.h. } A \in GL(n,\mathbb{K}) \text{ und } \bar{A}^{-1} = A^t}$

(↑ sowohl im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ als auch im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$(A^t = A^*$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R})$

(ii) $A \in M_n(\mathbb{C})$ heißt <u>unitär</u> $:\Leftrightarrow \underbrace{A^* A = A A^* = E_n}_{\text{d.h. } A \in GL(n,\mathbb{C}) \text{ und } \bar{A}^{-1} = A^* = \overline{A^t}}$

Satz (i) $\boxed{O(n)} := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ orthogonal}\}$

ist eine Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$ mit $\forall_{A \in O(n)} \det(A) = \pm 1$

$O(n)$ heißt <u>die ((reelle)) orthogonale Gruppe</u>

$\boxed{O(n,\mathbb{C})} := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ orthogonal}\}$

ist eine Untergruppe von $GL(n,\mathbb{C})$ mit $\forall_{A \in O(n,\mathbb{C})} \det(A) = \pm 1$

$O(n,\mathbb{C})$ heißt <u>die komplexe orthogonale Gruppe</u>.

(ii) $\boxed{U(n)} := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ unitär}\}$

ist eine Untergruppe von $GL(n,\mathbb{C})$ mit $\forall_{A \in U(n)} |\det(A)| = 1$

$U(n)$ heißt <u>die unitäre Gruppe</u>.

[Beweis: <u>Zu (i)</u>: Aus $A \in \begin{cases} O(n) \\ O(n,\mathbb{C}) \end{cases}$ folgt $\det(A) \underbrace{\det(A^t)}_{\det A} = \det(A A^t) =$

$= \det(E_n) = 1$, also $\det(A) = \pm 1$, insbes. A invertierbar.

Ferner folgt aus $\bar{A}^{-1} = A^t$ und $\bar{B}^{-1} = B^t$, daß auch

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^tA^t = (AB)^t$$

und

$$(\bar{A}^{-1})^{-1} = (A^t)^{-1} = (\bar{A}^{-1})^t.$$

$\det(\bar{A}^t) = \det(\bar{A}) = \overline{\det(A)}$ (Leibniz-Formel 6.6(*))

Zu (ii): Aus $A \in \mathcal{U}(n)$ folgt $\underbrace{\det(A)\overline{\det(A^*)}}_{=|\det(A)|^2} = \det(AA^*) =$

$= \det E_n = 1$, also $|\det(A)| = 1$, insbes. A invertierbar.

Ferner folgt aus $\bar{A}^{-1} = A^*$ und $\bar{B}^{-1} = B^*$, daß auch

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^*A^* = (AB)^*$$

und

$$(\bar{A}^{-1})^{-1} = (A^*)^{-1} = (\bar{A}^{-1})^*,$$

wegen $A^*(\bar{A}^{-1})^* = (\bar{A}^{-1}A)^* = E_n^* = E_n$ q.e.d.]

22.7.03
(25.)

8.53 Satz

Sei V ein n-dim. $\{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_n)$ sei eine ONB von V.

Dann gilt:

$$f \text{ ist } \left\{\begin{matrix}\text{orthogonal}\\ \text{unitär}\end{matrix}\right\} \iff M_{\mathcal{A}}(f) \text{ ist } \left\{\begin{matrix}\text{orthogonal}\\ \text{unitär}\end{matrix}\right\}$$

$$\left(\text{d.h. } M_{\mathcal{A}}(f) \in \left\{\begin{matrix}O(n)\\ U(n)\end{matrix}\right\}\right)$$

Beweis: Sei $A := M_{\mathcal{A}}(f)$. Dann folgt

$$\text{l.S.} \underset{8.51}{\iff} f^*f = ff^* = id_V \iff \underbrace{M_{\mathcal{A}}(f^*f)}_{=M_{\mathcal{A}}(f^*)M_{\mathcal{A}}(f)=A^*A} = \underbrace{M_{\mathcal{A}}(ff^*)}_{=M_{\mathcal{A}}(f)M_{\mathcal{A}}(f^*)=AA^*} = \underbrace{M_{\mathcal{A}}(id_V)}_{=E_n}$$

$$\underset{8.52}{\iff} \text{r.S.}, \quad \text{q.e.d.}$$

8.54 Satz

(i) Sei V ein n-dim $\left\{\begin{matrix}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{matrix}\right\}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ $\left\{\begin{matrix}\text{orthogonal}\\ \text{unitär}\end{matrix}\right\}$.

Dann gilt für jeden Eigenwert $\lambda \in \left\{\begin{matrix}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{matrix}\right\}$ von f:

$$\left\{\begin{matrix}\lambda = \pm 1\\ |\lambda| = 1\end{matrix}\right\}.$$

(ii) Sei $A \in \left\{\begin{matrix}O(n)\\ U(n)\end{matrix}\right\}$. Dann gilt für jeden Eigenwert $\lambda \in \left\{\begin{matrix}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{matrix}\right\}$ von A: $\left\{\begin{matrix}\lambda = \pm 1\\ |\lambda| = 1\end{matrix}\right\}$.

Beweis: Zu (i): Sei $\lambda \in \left\{\begin{matrix}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{matrix}\right\}$ ein Eigenwert von f.

Es existiert also ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit $f(v) = \lambda v$, also

$$\langle v, v\rangle \underset{\text{Vor.}}{=} \langle f(v), f(v)\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \underbrace{\lambda\bar{\lambda}}_{|\lambda|^2}\underbrace{\langle v, v\rangle}_{>0},$$

also $|\lambda|^2 = 1$, d.h. $|\lambda| = 1$, also im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\lambda = \pm 1$.

Zu (ii): Sei $A \in \left\{\begin{matrix}O(n)\\ U(n)\end{matrix}\right\}$. Die kanonische Basis $\mathcal{A} = (e_1, \dots, e_n)$ von $\mathbb{C}^n$ ist eine ONB. Sei $f \in \left\{\begin{matrix}\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)\\ \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)\end{matrix}\right\}$ der eindeutig bestimmte Endomorphismus mit $A = M_{\mathcal{A}}(f)$.

Nach 8.53 ist dann f $\left\{\begin{matrix}\text{orthogonal}\\ \text{unitär}\end{matrix}\right\}$. Nach 7.12 ist jeder Eigenwert $\lambda \in \left\{\begin{matrix}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{matrix}\right\}$ von $M_{\mathcal{A}}(f) = A$ auch Eigenwert von f, also folgt (ii) aus (i), q.e.d.

8.55 Satz

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Dann sind folgende fünf Aussagen paarweise äquivalent:

(1) A ist orthogonal (im Falle $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) bzw. unitär (im Falle $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), d.h. $A^*A = AA^* = E_n$.

(2) $A^*A = E_n$.

(3) $AA^* = E_n$.

(4) Die Spalten von A bilden eine ONB von $\mathbb{K}^n$.

(5) Die Zeilen von A bilden eine ONB von $\mathbb{K}^n$.

Beweis: Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, also $A^* = \overline{A^t} = (\overbrace{\overline{a_{ji}}}^{=:a^*_{ij}})_{i,j=1,\dots,n}$

(1) $\Leftrightarrow$ (2): "$\Rightarrow$" ist klar. "$\Leftarrow$" Aus $A^*A = E_n$ folgt $\det(A^*)\det(A) = 1$, also $\det(A) \neq 0$, also ist A invertierbar. Daher folgt weiter $A^* = A^*(\underbrace{A\bar{A}^{-1}}_{=E_n}) = (\underbrace{A^*A}_{\overset{(2)}{=}E_n})\bar{A}^{-1} = \bar{A}^{-1}$, also $AA^* = A\bar{A}^{-1} = E_n$.

(1) $\Leftrightarrow$ (3): folgt analog.

(2) $\Leftrightarrow$ (4) gilt wegen

$$\forall_{i,j\in\{1,\dots,n\}} (A^*A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a^*_{ik}}_{\overline{a_{ki}}} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\overline{a_{ki}} = \langle \underbrace{A_{\cdot j}}_{\substack{j\text{-ter Spalten-}\\ \text{vektor von } A}}, A_{\cdot i}\rangle$$

(3) $\Leftrightarrow$ (5) gilt analog wegen

$$\forall_{i,j\in\{1,\dots,n\}} (AA^*)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\underbrace{a^*_{kj}}_{\overline{a_{jk}}} = \langle \underbrace{A_{i\cdot}}_{\substack{i\text{-ter Zeilen-}\\ \text{vektor von } A}}, A_{j\cdot}\rangle,$$

q.e.d.

8.56 Beispiele

(i) Sei $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{K})$. Dann gilt

$$A^t = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}, \text{ also}$$

A orthogonal (d.h. $\in O(2)$ bzw. $\in O(2, \mathbb{R})$)

$$\Leftrightarrow A^t = A^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \{\pm\} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \wedge \det A = \{\pm\} 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{entweder } \alpha = \delta, \gamma = -\beta, \alpha^2 + \gamma^2 = 1 \\ \text{oder } \quad \alpha = -\delta, \gamma = \beta, \alpha^2 + \gamma^2 = 1 \end{cases}$$

(ii) Wir betrachten den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann folgt aus (i)

$$A \in O(2) \Leftrightarrow \exists_{\varphi \in \mathbb{R}} \left(A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \vee A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \right)$$

$A(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ ist eine Drehmatrix, die im Falle $\underbrace{\varphi \notin \mathbb{Z}\pi}_{\text{d.h. } \sin\varphi \neq 0}$ keinen Eigenwert besitzt, $\det A(\varphi) = 1$.

$\tilde{A}(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - t & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi - t \end{vmatrix} = t^2 - \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = t^2 - 1$$

$$= (t-1)(t+1),$$

also die Eigenwerte $+1$ und -1, $\det \tilde{A}(\varphi) = -1$.

Sei V ein n-dim. euklidischer Vektorraum. Dann ist jede lineare isometrische Abbildung $f: V \to V$ (d.h. jede Abb. $f \in O(V)$) abstandserhaltend (vgl. 8.47(i))

Trivialerweise gibt es auch nicht-lineare abstandserhaltende Abbildungen $V \to V$, nämlich z.B. „Translationen"

$$t_{v_0}: V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto v + v_0 =: t_{v_0}(v)$$

(wobei $v_0 \in V$).

Der folgende Satz zeigt: Jede abstandserhaltende Abbildung $g: V \to V$ ist von der Gestalt $g = t_{v_0} \cdot f$ mit $f \in O(V)$ und $v_0 \in V$.

8.57 Satz Sei V ein n-dim. euklidischer Vektorraum und sei $g: V \to V$ eine abstandserhaltende Abbildung, d.h. $\forall_{v_1, v_2 \in V} \; \|g(v_1) - g(v_2)\| = \|v_1 - v_2\|$.

Dann existieren eindeutig bestimmte $f \in O(V)$ und $v_0 \in V$ mit

$$\forall_{v \in V} \quad g(v) = f(v) + v_0 \qquad (*)$$

Beweis: Zur Eindeutigkeit: Aus $f \in O(V)$, $v_0 \in V$ und $(*)$ folgt

$$g(0) = \underbrace{f(0)}_{=0} + v_0 = v_0 \;, \quad \forall_{v \in V} \; f(v) = g(v) - g(0),$$

also sind f und v_0 mit den o.g. Eigenschaften – falls existent – eindeutig bestimmt.

Zur Existenz: Sei $v_0 := g(0)$ und sei $f: V \to V$ def. durch

$$\forall_{v \in V} \; f(v) := g(v) - g(0)$$

Zu zeigen ist also, daß $f \in O(V)$ (1)

a) $\forall_{v_1, v_2 \in V} \quad \|f(v_1) - f(v_2)\| = \|g(v_1) - \cancel{g(0)} - g(v_2) + \cancel{g(0)}\|$

$\overset{\text{Vor.}}{=} \|v_1 - v_2\|$,

also auch (wegen $f(0) = g(0) - g(0) = 0$):

$\forall_{v \in V} \quad \|f(v)\| = \|f(v) - f(0)\| \overset{\text{s.o.}}{=} \|v - 0\| = \|v\|$.

b) $\forall_{v_1, v_2 \in V} \quad \langle f(v_1), f(v_2) \rangle = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\|f(v_1)\|^2}_{\overset{\text{a)}}{=} \|v_1\|^2} + \underbrace{\|f(v_2)\|^2}_{\overset{\text{a)}}{=} \|v_2\|^2} - \underbrace{\|f(v_1) - f(v_2)\|^2}_{\overset{\text{a)}}{=} \|v_1 - v_2\|^2} \Big)$

$= \langle v_1, v_2 \rangle$.

Wegen b) fehlt zum Nachweis von (1) nur noch der Beweis von:

$$f: V \to V \text{ ist linear} \qquad (2)$$

c) Sei $(u_1, \dots, u_n)$ eine ONB von V. Dann ist auch $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ eine ONB von V, denn es gilt

$\forall_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \quad \langle f(u_i), f(u_j) \rangle \overset{\text{b)}}{=} \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$.

($f(u_1), \dots, f(u_n)$ sind linear unabhängig z.B. nach 8.38(i) wegen $V_n\big(\text{Par}(f(u_1), \dots, f(u_n))\big) = \sqrt{G(f(u_1), \dots, f(u_n))} = 1$)

d) $\forall_{v \in V} \quad f(v) \overset{\text{c)}}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle f(v), f(u_i) \rangle f(u_i) \overset{\text{b)}}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle f(u_i)$

e) $\forall_{\substack{v_1, v_2 \in V \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}}} \quad f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \overset{\text{d)}}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, u_i \rangle}_{\lambda_1 \langle v_1, u_i \rangle + \lambda_2 \langle v_2, u_i \rangle} f(u_i)$

$\overset{\text{d)}}{=} \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$,

also gilt (2), q.e.d.

25.7.03
(26.)

8.58 Satz

(i) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch (d.h. $A^* = A^t = A$).
Dann existiert eine Matrix $B \in O(n)$ derart, daß

$$\underbrace{B^{-1}}_{\| \; B^t = B^*} A B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

(ii) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitesch (d.h. $A^* = \overline{A^t} = A$).
Dann existiert eine Matrix $B \in U(n)$ derart, daß

$$\underbrace{B^{-1}}_{\| \; \overline{B^t} = B^*} A B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Beweis (für (i) und (ii), $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bei (i), $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bei (ii)):
Sei $\mathcal{A} := (e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis von $\mathbb{K}^n$, also $\mathcal{A}$ ONB.
Sei $f \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ der eindeutig bestimmte Endomorphismus mit $M_{\mathcal{A}}(f) = A$. Dann gilt nach 8.18

$$M_{\mathcal{A}}(f^*) = \big(M_{\mathcal{A}}(f)\big)^* = A^* \underset{\text{Vor.}}{=} A = M_{\mathcal{A}}(f),$$

also $f^* = f$, d.h. f ist selbstadjungiert.
Nach 8.27 existiert eine ONB $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ von $\mathbb{K}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von f, etwa $f(u_i) = \lambda_i u_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{K}$ für $i = 1, \dots, n$, und nach 8.21 sind alle λ_i reell, also

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(f) \underbrace{M_{\mathcal{B}\mathcal{A}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n})}_{= \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix} =: B} = B^{-1} A B.$$

Nach 8.55 „(4) $\Rightarrow$ (1)" gilt $B \in O(n)$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $B \in U(n)$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, q.e.d.

8.59 Satz

(i) Sei V ein n-dim $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $f \in \mathcal{U}(V)$, (d.h. $f \in \mathrm{End}(V)$ unitär, d.h. isometrisch, d.h. $f^* f = f f^* = id_V$) (vgl. 8.51)
Dann existiert eine ONB $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_n)$ von V bestehend aus Eigenvektoren von f, also

$$M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_i \in \mathbb{C},\ |\lambda_i| = 1 \text{ für } i = 1, \dots, n$$

$\overset{8.53 \to}{\Rightarrow}$ "$\in$"
$\mathcal{U}(n)$

(ii) Sei $A \in \mathcal{U}(n)$. Dann existiert eine Matrix $B \in \mathcal{U}(n)$ mit

$$\underbrace{\bar{B}^{-1}}_{\overline{B^t} = B^*} A B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_i \in \mathbb{C},\ |\lambda_i| = 1 \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Beweis: Zu (i): Als unitärer Endomorphismus ist f insbesondere normal (d.h. $f^* f = f f^*$). Nach 8.30 (oder 8.34) existiert daher eine ONB von V bestehend aus Eigenvektoren von f. Für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von f gilt $|\lambda| = 1$ nach 8.54(i). Damit ist (i) klar.

Zu (ii): Sei $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis von $\mathbb{C}^n$, also $\mathcal{B}$ ONB. Sei $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ mit $M_{\mathcal{B}}(f) = A$. Nach 8.53 "$\Leftarrow$" ist f unitär. Nach (i) existiert daher eine ONB $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_n)$ von $\mathbb{C}^n$ mit $M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $|\lambda_i| = 1$ für $i = 1, \dots, n$.
Dann folgt mit $B := M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{C}^n}) = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}$: $B \in \mathcal{U}(n)$ und
$\uparrow$ 8.55 "(4)$\Rightarrow$(1)"

$$\bar{B}^{-1} A B = M_{\mathcal{B}\mathcal{A}}(id_{\mathbb{C}^n}) M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{C}^n})$$

$$= M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{q.e.d.}$$

Das „reelle Gegenstück" zu 8.59 ist komplizierter. Es lautet:

8.60 Satz

(i) Sei V ein n-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $f \in O(V)$, (d.h. $f \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal, d.h. isometrisch). Dann existiert eine ONB $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_n)$ von V derart, daß

$$M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & C \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & C \end{pmatrix} \begin{matrix} \} k \\ \} \ell \\ \} 2m \end{matrix} \quad (*)$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos t_i & -\sin t_i \\ \sin t_i & \cos t_i \end{pmatrix}$$

mit $k, \ell, m \geq 0$, $\underbrace{t_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi}_{\text{d.h. } \sin t_i \neq 0}$ für $i = 1, \dots, m$

(ii) Sei $A \in O(n)$. Dann existiert eine Matrix $B \in O(n)$, mit

$$\underbrace{B^{-1}}_{\| B^t} A B = \underbrace{C}_{\text{wie in (i)}} .$$

Wir bereiten den Beweis von 8.60 durch zwei Lemmata vor:

8.61 Lemma Sei V ein n-dim. euklidischer Vektorraum und sei $f \in O(V)$.

Dann existiert ein f-invarianter Untervektorraum W von V mit $\dim W \in \{1,2\}$.

Beweis: $g := f + f^* \in \mathrm{End}(V)$ ist selbstadjungiert (wegen $g^* = f^* + \underbrace{f^{**}}_{f} = f^* + f = g$) Nach 8.25 besitzt daher g einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, also existiert $v \in V \setminus \{0\}$ mit $g(v) = \lambda v$. Dann ist $W := \mathrm{Spann}\{v, f(v)\}$ ein Untervektorraum von V mit $\dim W \in \{1,2\}$. Wir behaupten:

W ist f-invariant.

Hierzu genügt es nach Def von W zu zeigen, daß ($f(v) \in W$ gilt sowieso und) $f(f(v)) \in W$.

Beweis hiervon: Wegen $f \in O(V)$ gilt $\hat{f} = f^*$, also folgt

$$f(v) + \hat{f}(v) = g(v) = \lambda v,$$

$$\underbrace{f(f(v) + \hat{f}(v))}_{f(f(v)) + v} = \lambda f(v),$$

$$f(f(v)) = -v + \lambda f(v) \in \mathrm{Spann}\{v, f(v)\} = W,$$

q.e.d.

Bemerkung: Das obige Lemma läßt sich erheblich verschärfen. Mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton 7.30 läßt sich nämlich zeigen:

Für jeden Endomorphismus f eines n-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraums V existiert ein 1-dim. oder ein 2-dim f-invarianter Untervektorraum von V.

(vgl. Übungen, Ü 134(iii)).

8.62 Lemma Sei V ein n-dim. euklidischer Vektorraum und sei $f \in O(V)$. Dann gilt:
Für jeden f-invarianten Untervektorraum W von V ist auch $W^\perp$ f-invariant und

$$f|W \in O(W) \quad \text{und} \quad f|W^\perp \in O(W^\perp).$$

(W und $W^\perp$ sind euklidische Vektorräume mit der Beschränkung des Skalarprodukts von V als Skalarprodukt.)

Beweis: Aus $f(W) \subset W$ folgt wegen $f \in \mathrm{Aut}(V)$:
$f(W) = W$, also auch $f^{-1}(W) = W$.
Für alle $v \in W^\perp$ gilt daher $f(v) \in W^\perp$ wegen

$$\forall_{w \in W} \quad \langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle = \langle v, \underbrace{f^{-1}(w)}_{\in f^{-1}(W) = W} \rangle = 0$$

($f^* = f^{-1}$)

Damit ist gezeigt, daß $f(W^\perp) \subset W^\perp$, (also auch wegen $f \in \mathrm{Aut}(V)$: $f(W^\perp) = W^\perp$).
Mit f sind auch $f|W$ und $f|W^\perp$ isometrisch, also folgt $f|W \in O(W)$ und $f|W^\perp \in O(W^\perp)$, q.e.d.

Beweis von 8.60 (vgl. Seite 293):

Zu (i): Vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_+$:
Im Falle $n = 1$ ist die Beh. klar, (denn für jeden Einheitsvektor u_1 von V gilt $f(u_1) = \pm u_1$, also $M_{\mathcal{A}}(f) = (\pm 1)$, falls $\mathcal{A} = (u_1)$)
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und angenommen die Beh. ist für $1, \ldots, n-1$ anstelle von n gezeigt.
Nach 8.61 existiert ein f-invarianter Untervektorraum W von V mit $\dim W \in \{1, 2\}$. Nach 8.62 ist dann auch $W^\perp$ ein f-invarianter Untervektorraum von V und es gilt $f|W \in O(W)$ und $f|W^\perp \in O(W^\perp)$.

Wegen $\dim W^\perp = \underbrace{\dim V}_{=n} - \underbrace{\dim W}_{\geq 1} \leq n-1$ können wir die Induktionsvoraussetzung auf $f|W^\perp \in O(W^\perp)$ anwenden und erhalten eine ONB $\widetilde{\mathcal{A}}$ von $W^\perp$ derart, daß $M_{\widetilde{\mathcal{A}}}(f|W^\perp)$ die gewünschte Gestalt hat

1. Fall: $\dim W = 1$: Dann existiert wegen $f|W \in O(W)$ ein Einheitsvektor $w_1 \in W$ mit $f(w_1) = \pm w_1$. Ergänzt man $\widetilde{\mathcal{A}}$ durch Hinzunahme von w_1 „an geeigneter Stelle" zu $\mathcal{A}$ so hat $M_{\mathcal{A}}(f)$ die Gestalt (*).

2. Fall: $\dim W = 2$: Es gilt $\det \underbrace{(f|W)}_{O(W)} = \pm 1$ (wegen $\det A = \pm 1$ für alle $A \in O(2)$ (nach 8.52) und wegen 8.53).

Im Falle $\det(f|W) = -1$ besitzt $f|W$ nach 8.56 (ii) die Eigenwerte 1 und -1, also existiert eine ONB $\widetilde{\mathcal{A}} = (w_1, w_2)$ von W mit $M_{\widetilde{\mathcal{A}}}(f|W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ergänzt man wiederum $\widetilde{\mathcal{A}}$ durch Hinzunahme von w_1 und w_2 „an geeigneter Stelle" zu $\mathcal{A}$, so hat $M_{\mathcal{A}}(f)$ die Gestalt (*).

Im Falle $\det(f|W) = +1$ sei $\widetilde{\mathcal{A}} = (w_1, w_2)$ eine bel. ONB von W. Dann gilt $M_{\widetilde{\mathcal{A}}}(f|W) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$, also

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ oder $= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ mit

$t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}\pi$. Ergänzt man wiederum $\widetilde{\mathcal{A}}$ durch Hinzunahme von w_1 und w_2 jeweils „an geeigneter Stelle" zu $\mathcal{A}$, so hat wieder $M_{\mathcal{A}}(f)$ die gewünschte Gestalt, q.e.d

29.7.03 (27.)

8.63 Aus 8.60 und Ü 131 (ii) folgt leicht der folgende Satz (Beweis als Übung):

Satz Sei V ein n-dim. euklidischer Vektorraum und sei $f \in O(V)$. Dann ist f die Komposition von endlich vielen Orthogonalspiegelungen an Hyperebenen (= $(n-1)$-dim. Untervektorräumen) W_i von V:

$$f = S_{W_1} \circ \ldots \circ S_{W_r}.$$

8.64 Satz (über positiv definite Matrizen)

Für eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(\mathbb{R})$ sind folgende fünf Aussagen (1) bis (5) paarweise äquivalent:

(1) A ist positiv definit (d.h. per def. (vgl. 8.12): $\forall_{x \in \mathbb{R}^n - \{0\}} \langle Ax, x\rangle > 0$)

(2) Alle Eigenwerte von A sind > 0.

(3) $\exists_{B \in O(n)} \underbrace{B^t}_{= B^{-1}} A B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

(4) $\exists_{B \in GL(n,\mathbb{R})} B^t A B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

(5) $\exists_{C \in GL(n,\mathbb{R})} A = C^t C$.

Ferner folgt aus jeder dieser Aussagen, daß

(6) $\det(A) > 0$.

Beweis: „(1) $\Rightarrow$ (2)": Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von A. Dann existiert $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ mit $Ax = \lambda x$ und es folgt

$$0 \underset{(1)}{<} \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \underbrace{\langle x, x\rangle}_{>0}, \text{ also } \lambda > 0.$$

„(2) $\Rightarrow$ (3)": $\Phi_A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ ist wegen $A^* = A^t = A$ selbstadjungiert (wegen $\langle \Phi_A(x), y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle x, \Phi_A(y)\rangle$).

Nach 8.27 existiert daher eine ONB $(u_1, \dots, u_n)$ von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von Φ_A, d.h. A, etwa $Au_i = \Phi_A(u_i) = \lambda_i u_i$ für $i = 1, \dots, n$. Nach (2) gilt $\lambda_i > 0$ für alle i. Nach 8.55 gilt

$B := \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix} \in O(n)$ und wegen

$$\forall_{i \in \{1,\dots,n\}} \quad B^{-1} A \underbrace{B e_i}_{u_i} = B^{-1}(\lambda_i u_i) = \lambda_i B^{-1} u_i = \lambda_i e_i$$

folgt $B^{-1} A B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

„(3) $\Rightarrow$ (4)": klar wegen $O(n) \subset GL(n,\mathbb{R})$.

„(4) ⇒ (5)": Mit $D := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} = D^t$ gilt $B^t A B \underset{(4)}{=} D^t D$,

also $A = \underbrace{(B^t)^{-1}}_{(B^{-1})^t} D^t D B^{-1} = (DB^{-1})^t \underbrace{DB^{-1}}_{=:C} = C^t C$,

$\det(C) = \det(DB^{-1}) = \underbrace{\det(D)}_{\sqrt{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\sqrt{\lambda_n} > 0} \underbrace{\det(B^{-1})}_{\neq 0} \neq 0.$

„(5) ⇒ (1)": $\forall_{x \in \mathbb{R}^n - \{0\}} \langle Ax, x\rangle \underset{(5)}{=} \langle C^t C x, x\rangle = \langle \underbrace{Cx}_{\neq 0, \text{ da } C \text{ invertierbar}}, Cx\rangle > 0$

Damit ist die Äquivalenz von (1) bis (5) gezeigt.

Aus (3) folgt:

$$\det(A) = \underbrace{\det(B^{-1})}_{= \frac{1}{\det(B)}} \det(A) \det(B) = \det(B^{-1} A B) = \underbrace{\lambda_1}_{>0} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\lambda_n}_{>0} > 0,$$

q.e.d

8.65 Satz („Hauptabschnittsdeterminanten-Kriterium")

Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$

Dann gilt:

A ist genau dann positiv definit, wenn

$$\forall_{k \in \{1,\ldots,n\}} \quad \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}}_{=: A_k \in M_k(\mathbb{R})} > 0$$

Beweis: „⇒": Mit A ist offensichtlich auch A_k symmetrisch.

Wegen $\forall_{y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k - \{0\}}$ $\langle A_k y, y\rangle_{\mathbb{R}^k} = \underbrace{\langle A \tilde{y}, \tilde{y}\rangle_{\mathbb{R}^n}}_{\underset{\text{Vor.}}{>} 0}$

$\Rightarrow \tilde{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

$$\underbrace{\left\langle \left(\begin{array}{c|c} A_k & * \\ \hline * & * \end{array}\right) \begin{pmatrix} y \\ \hline 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \hline 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^n}}_{A}$$

ist mit A auch A_k positiv definit, also folgt $\det(A_k) > 0$ nach 8.64.

„$\Leftarrow$": Beweis durch vollst. Induktion über $n \in \mathbb{N}_+$.

Im Falle $n=1$ gilt $A=(a_{11})$ mit $a_{11}>0$, also ist A positiv definit (wegen $\forall_{x \in \mathbb{R}-\{0\}} \langle Ax, x\rangle = \underbrace{a_{11}}_{>0}\underbrace{x^2}_{>0} > 0$).

Angenommen $n-1 \geq 1$ und „$\Leftarrow$" gelte für $n-1$ anstelle von n.

Die symmetrische Matrix $A_{n-1} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ erfüllt die Vor. der rechten Seite, also ist A_{n-1} nach Ind.-Vor. positiv definit. Nach 8.64 „(1) $\Rightarrow$ (4)" existiert daher eine Matrix $\tilde{B} \in GL(n-1, \mathbb{R})$ derart, daß

$$\tilde{B}^t A_{n-1} \tilde{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}_+ .$$

Dann folgt mit

$$B := \left(\begin{array}{c|c} \tilde{B} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right) \in GL(n, \mathbb{R}) :$$

$$\underbrace{B^t A B}_{\text{ist symmetrisch wegen } (B^tAB)^t = B^t \underbrace{A^t}_{=A} B} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{B}^t & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \hline * \cdots * & * \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \tilde{B} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \tilde{B}^t A_{n-1} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \hline * \cdots * & * \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \tilde{B}^t A_{n-1} \tilde{B} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \hline * \cdots * & * \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \beta_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \hline \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \end{array}\right)$$

hierdurch $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ definiert (Matrix ist symmetrisch!)

Wir setzen

$$C := \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & -\frac{\beta_1}{\lambda_1} \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & -\frac{\beta_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \in GL(n, \mathbb{R})$$

Dann folgt weiter

$$\underbrace{C^t B^t A B C}_{(BC)^t A (BC)} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \\ \hline -\frac{\beta_1}{\lambda_1} & \cdots & -\frac{\beta_{n-1}}{\lambda_{n-1}} & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \beta_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \hline \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & -\frac{\beta_1}{\lambda_1} \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & -\frac{\beta_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\in GL(n,\mathbb{R})}$$

$$= \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \beta_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * \end{array}\right)}$$

$$= \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{array}\right)}_{\text{hat Determinante}} \quad \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ hierdurch definiert}$$

$$= \underbrace{(\det(BC))^2}_{>0} \underbrace{\det(A)}_{=\det A_n \underset{\text{Vor.}}{>} 0} > 0$$

derhalb (wegen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}_+$ auch $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$

Nach 8.64 „(4) $\Rightarrow$ (1)" folgt daher, daß A positiv definit ist,

q.e.d.

§ 9 Bilinearformen

allgemeiner als in 8.1 (dort $K = \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)

9.1 Def.: Seien K ein beliebiger Körper und V ein K-Vektorraum. Ferner sei $s : V \times V \to K$ eine Abbildung.

s heißt **Bilinearform auf V**, wenn für alle $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ und alle $\lambda \in K$ gilt:

(B1) $s(v_1 + v_2, w) = s(v_1, w) + s(v_2, w)$
$s(\lambda v, w) = \lambda\, s(v, w)$
} d.h. $s(\dots, w) \in V^*$ (d.h. s ist linear im 1. Argument bei festgehaltenem 2. Argument)

und

(B2) $s(v, w_1 + w_2) = s(v, w_1) + s(v, w_2)$
$s(v, \lambda w) = \lambda\, s(v, w)$
} d.h. $s(v, \dots) \in V^*$

s heißt **symmetrisch** (bzw. **alternierend**), wenn für alle $v, w \in V$

$$s(v, w) = s(w, v) \quad \left(\text{bzw. } s(v, w) = -s(w, v)\right).$$

9.2 Sei V ein n-dim. $\widetilde{K}$-Vektorraum (bel. Körper) und sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V.

(i) Def.: Sei s eine Bilinearform auf V. Dann heißt

$$\boxed{M_{\mathcal{A}}(s) := \left(s(v_i, v_j)\right)_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(K)}$$

die Matrix von s bzgl. $\mathcal{A}$.

s ist durch $M_{\mathcal{A}}(s) =: A = (a_{ij})$ eindeutig bestimmt, denn es gilt

$$\forall\, x = \sum_i x_i v_i,\ y = \sum_j y_j v_j: \quad s(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i\, y_j\, s(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i\, a_{ij}\, y_j \quad (*)$$

$$= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

(ii) **Satz** $s \longmapsto M_{\mathcal{A}}(s)$ ist ein K-Vektorraum-Isomorphismus des K-Vektorraums $\mathcal{L}^2(V,K)$ aller Bilinearformen auf V auf den K-Vektorraum $M_n(K)$.

s ist genau dann symmetrisch, wenn $M_{\mathcal{A}}(s) \in M_n(K)$ symmetrisch ist.

[Beweis: Die Umkehrabbildung $M_n(K) \longrightarrow \mathcal{L}^2(V,K)$, $A=(a_{ij}) \longmapsto s$ ist durch (*) gegeben. Damit ist die 1. Aussage klar.

Zur 2. Aussage: Ist s symmetrisch, so ist auch $M_{\mathcal{A}}(s) = (a_{ij})$ symmetrisch wegen $a_{ij} = s(v_i, v_j) = s(v_j, v_i) = a_{ji}$.

Ist $M_{\mathcal{A}}(s) = (a_{ij})$ symmetrisch, so ist auch s symmetrisch wegen

$$s(x,y) \underset{(*)}{=} \sum_{i,j} x_i \underbrace{a_{ij}}_{a_{ji}} y_j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Indexvertauschung} \\ i \leftrightarrow j}}{=} \sum_{i,j} x_j a_{ij} y_i = \sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j \underset{(*)}{=} s(y,x),$$

q.e.d.]

1.8.03 (28.)

9.3 **Satz** Sei V ein n-dim $\underbrace{K}_{\text{bel. Körper}}$-Vektorraum und seien $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ zwei Basen von V.

Ferner sei $s : V \times V \longrightarrow K$ eine Bilinearform auf V.

Dann gilt mit $C := M_{\mathcal{B}\mathcal{A}}(id_V) \in GL(n,K)$:

$$M_{\mathcal{B}}(s) = C^t M_{\mathcal{A}}(s) C. \qquad (*)$$

Beweis: Sei $C = (c_{ij})$, $A = (a_{ij}) := M_{\mathcal{A}}(s)$, $B = (b_{ij}) := M_{\mathcal{B}}(s)$.

Dann gilt (*) wegen

$$\forall_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \quad b_{ij} = s(w_i, w_j) = s\Big(\sum_k c_{ki} v_k, \sum_e c_{ej} v_e\Big)$$

$$= \sum_{k,e} c_{ki} c_{ej} \underbrace{s(v_k, v_e)}_{a_{ke}} = \sum_{k,e} \underbrace{c^t_{ik}}_{:= c_{ki}} a_{ke} c_{ej}$$

$$= (C^t A C)_{ij}, \quad \text{q.e.d.}$$

2 Beachte: Ist $f \in \underline{\underline{End(V)}}$, so gilt im Gegensatz zu (*):

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \underline{\underline{C^{-1}}}\, M_{\mathcal{A}}(f)\, C \qquad \text{(z.B. nach 6.26(3))}.$$

9.4 Def.: Sei V ein n-dim K-Vektorraum und sei $s: V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform.

Dann heißt

$$q: V \to K, \text{ def. durch } \forall_{v \in V}\ q(v) := s(v, v),$$

die zu s gehörige quadratische Form.

Im Falle $\mathrm{char}(K) \neq 2$ (d.h. $\underbrace{1_K + 1_K}_{=:2_K} \neq 0_K$) läßt sich s aus q wie folgt berechnen:

$$\forall_{v,w \in V}\quad s(v,w) = \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right)$$

[wegen $\underbrace{2}_{\neq 0} \times$ r.S. $= q(v+w) - q(v) - q(w)$

$= s(v+w, v+w) - s(v,v) - s(w,w)$

$= s(v,w) + s(w,v) = 2s(v,w) = 2 \times$ l.S.]

9.5 Satz (Orthogonalisierungssatz für symmetrische Bilinearformen)

Sei V ein n-dim. K-Vektorraum (K bel. Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$) und sei $s: V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform.

Dann existiert eine Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V mit

$$\underbrace{s(v_i, v_j) = 0 \text{ für alle } i,j \in \{1,\ldots,n\},\ i \neq j}_{\text{d.h. per def.: „}v_i \text{ orthogonal zu } v_j \text{ bzgl. } s\text{“}} \qquad (*)$$

Ist $q: V \to K$ die zu s gehörige quadratische Form, so folgt mit $\alpha_i := q(v_i) = s(v_i, v_i)$:

$$\forall_{v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in V}\quad q(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 \qquad (**)$$

Beweis: Wir beweisen die 1. Aussage durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_+$. Für $n=1$ ist nichts zu zeigen. Angenommen $n \geq 2$ und die 1. Aussage gilt für $n-1$ anstelle von n.

Seien jetzt V, s wie in der Var. des Satzes, insbes. $\dim V = n$.

Im Falle $\forall_{v \in V}\ q(v) = s(v,v) = 0$ folgt aus 9.4, daß auch $\forall_{v,w \in V}\ s(v,w) = 0$, also gilt die 1. Aussage trivialerweise.

Wir nehmen im folgenden an, daß $v_1 \in V$ existiert mit

$$q(v_1) = s(v_1, v_1) \neq 0 \quad . \tag{1}$$

Dann ist

$$W := \{ w \in V \mid s(v_1, w) = 0 \} = \operatorname{Kern} \underbrace{s(v_1, \dots)}_{\in V^*} \tag{2}$$

ein Untervektorraum von V und es gilt

$$V = K v_1 \oplus W \quad . \tag{3}$$

[Zu (3): Sei $v \in V$. Dann folgt $\tilde{v} := \frac{s(v_1, v)}{s(v_1, v_1)} v_1 \in K v_1$,

$v = \tilde{v} + (v - \tilde{v})$ und $v - \tilde{v} \in W$ (wegen $s(v_1, v - \tilde{v}) =$

$= s(v_1, v) - \underbrace{s(v_1, \tilde{v})}_{\underset{\text{Def } \tilde{v}}{=}} s(v_1, v) - \frac{s(v_1, v)}{s(v_1, v_1)} s(v_1, v_1) = 0$).

Ferner folgt aus $w \in K v_1 \cap W$, daß $w = \lambda v_1$ mit $\lambda \in K$ und $s(v_1, w) = 0$, also $0 = s(v_1, \lambda v_1) = \lambda \underbrace{s(v_1, v_1)}_{\neq 0 \ (1)}$,

also $\lambda = 0$ und folglich $w = \lambda v_1 = 0$. Damit ist (3) gezeigt.]

Aus dem Dimensionssatz 4.22 (angewandt auf die lineare Abbildung $s(v_1, \dots) : V \to K$) sowie (1) und (2) folgt $\dim W = n-1$. Wir können daher die Induktionsvoraussetzung auf die symmetrische Bilinearform $\tilde{s} := s | W \times W$ von W anwenden und folgern, daß eine Basis $(v_2, \dots, v_n)$ von W existiert mit

$$s(v_i, v_j) = 0 \quad \text{für alle } i, j \in \{2, \dots, n\},\ i \neq j \quad .$$

Nach (3) ist $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Da auch

$$s(v_1, \underbrace{v_j}_{\in W}) \underset{(2)}{=} 0 \text{ für } j = 2, \dots, n,$$

so erfüllt diese Basis (*). Damit ist die 1. Aussage der Behauptung bewiesen.

Beweis der 2. Aussage:

$$q(v) = s(v,v) = s\Big(\sum_i x_i v_i, \sum_j x_j v_j\Big) = \sum_{i,j} x_i x_j \underbrace{s(v_i, v_j)}_{\underset{(*)}{=} 0 \text{ für } i \neq j}$$

$$= \sum_i x_i^2 \underbrace{s(v_i, v_i)}_{= q(v_i) = \alpha_i} = \sum_i \alpha_i x_i^2 \quad , \text{ q.e.d.}$$

← Der Spezialfall $K = \mathbb{R}$ dieses Satzes ist bereits klar nach 8.58(i)

9.6 Satz Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(K)$ eine symmetrische Matrix (K bel. Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$).
Dann existiert eine Matrix $C \in GL(n,K)$ derart, daß

$$C^t A C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K.$$

Beweis: Sei $\mathcal{A} = (e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis von K^n und sei $s : K^n \times K^n \to K$ die symmetrische Bilinearform von K^n mit $M_{\mathcal{A}}(s) = A$, vgl. 9.2.
Nach 9.5 existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von K^n mit

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$$

Schließlich folgt aus 9.3 mit $C := M_{\mathcal{B}\mathcal{A}}(\mathrm{id}_{K^n}) = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$:

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}}(s)}_{= \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}} = C^t \underbrace{M_{\mathcal{A}}(s)}_{= A} C \quad , \text{ q.e.d.}$$

Im folgenden untersuchen wir den Spezialfall $K = \mathbb{R}$ genauer.

besitzt auch ein „komplexes Gegenstück" für hermitesche Formen (nicht in dieser Vorl.)

9.7 Satz („Sylvesterscher Trägheitssatz")

Sei V ein n-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $s: V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Dann folgt:

(i) Es existiert eine Basis $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_n)$ von V derart, daß

$$M_{\mathcal{A}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} k \\ \\ \\ \} \ell \\ \\ \\ \} m \end{matrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\left(= \left(s(u_i, u_j)\right)\right)$$

mit $k, \ell, m \in \mathbb{N}$, $k + \ell + m = n$.

(ii) k, ℓ, m hängen nur von s (und nicht von der speziellen Wahl von $\mathcal{A}$) ab, d.h.:

Ist $\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ eine weitere Basis von V mit

$$M_{\tilde{\mathcal{A}}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \tilde{k} \\ \\ \\ \} \tilde{\ell} \\ \\ \\ \} \tilde{m} \end{matrix}$$

$$\left(= \left(s(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j)\right)\right)$$

so gilt $k = \tilde{k}$, $\ell = \tilde{\ell}$ und $m = \tilde{m}$.

(iii) Für die Invarianten k, ℓ, m von s gilt:

$$k = \max\{\dim W \mid W \text{ Untervektorraum von } V \text{ mit } \forall_{v \in W \setminus \{0\}} \; s(v,v) > 0\},$$

$$\ell = \max\{\dim W \mid W \text{ Untervektorraum von } V \text{ mit } \forall_{v \in W \setminus \{0\}} \; s(v,v) < 0\},$$

$$m = \dim V_0, \text{ wobei } V_0 := \{v \in V \mid \underbrace{s(v, \dots) = 0}_{\text{d.h. } \forall_{w \in V} \, s(v,w) = 0}\} \text{ Untervektorraum von } V$$

((Man kann auch ohne 9.5 mit 8.58 (i) schließen!))

Beweis: 1.) Nach 9.5 existiert eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V mit

$$\forall_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \quad s(v_i, v_j) = \underbrace{\alpha_i}_{\in \mathbb{R}} \delta_{ij} .$$

O.B.d.A. dürfen wir annehmen (dazu evtl. umnumerieren), daß

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0 \ , \quad \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+l} < 0 \ , \quad \alpha_{\underbrace{k+l+1}_{n-m+1}} = \dots = \alpha_n = 0$$

mit $k, l, m \in \mathbb{N}$, $k + l + m = n$.

Wir setzen

$$u_i := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} v_i & \text{für } i = 1, \dots, k \\ \frac{1}{\sqrt{-\alpha_i}} v_i & \text{für } i = k+1, \dots, k+l \\ v_i & \text{für } i = k+l+1, \dots, n . \end{cases}$$

Dann ist auch $\mathcal{A} := (u_1, \dots, u_n)$ eine Basis von V und es gilt

$$\forall_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \quad s(u_i, u_j) = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{für } i \in \{1, \dots, k\} \\ -\delta_{ij} & \text{für } i \in \{k+1, \dots, k+l\} \\ 0 & \text{für } i \in \{k+l+1, \dots, n\} . \end{cases}$$

Damit ist (i) gezeigt. Im folgenden sei weiterhin $\mathcal{A}$ wie in 1.).

2.) Wir behaupten:

$$\underset{\substack{\| (iii) \\ \{v \in V \mid s(v, \dots) = 0\}}}{V_0} = \operatorname{Span}\{u_{k+l+1}, \dots, u_n\} \ , \quad \text{also } \dim V_0 = \underset{\substack{\| \\ n-k-l}}{m}$$

[Beweis hiervon: Für $v = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\beta_i}_{\in \mathbb{R}} u_i$ gilt:

$$v \in V_0 \iff \forall_{j \in \{1,\dots,n\}} \quad 0 = s(v, u_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, s(u_i, u_j) = \beta_j \underbrace{s(u_j, u_j)}_{\neq 0 \text{ genau für } j \in \{1,\dots,k+l\}}$$

$$\iff \forall_{j \in \{1,\dots,k+l\}} \ \beta_j = 0$$

$$\iff v \in \operatorname{Span}\{u_{k+l+1}, \dots, u_n\} . \ ]$$

Damit ist klar, daß V_0 und folglich erst recht $m = \dim V_0$ nicht von der speziellen Wahl von $\mathcal{A}$ wie in (i) abhängt

Wir setzen

$$V_+ := \operatorname{Spann}\{u_1, \dots, u_k\} \quad , \quad V_- := \operatorname{Spann}\{u_{k+1}, \dots, u_{k+\ell}\}$$

↖ hängen tatsächlich von A ab, falls $\neq \{0\}$ ↗
(vgl. späteres Beispiel 9.8)

Dann gilt also

$$V = \underbrace{V_+}_{k\text{-dim.}} \oplus \underbrace{V_-}_{\ell\text{-dim.}} \oplus \underbrace{V_0}_{m\text{-dim.}} ,$$

ferner

$$\underbrace{\forall_{v_+ \in V_+ - \{0\}} \; s(v_+, v_+) > 0}_{\text{d.h. } s|_{V_+ \times V_+} \text{ positiv definit}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\forall_{v_- \in V_- - \{0\}} \; s(v_-, v_-) < 0}_{\text{d.h. per def.: } s|_{V_- \times V_-} \text{ negativ definit}} .$$

[Denn aus $\underset{\neq 0}{v_+} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i$ folgt $s(v_+, v_+) = \sum_{i,j=1}^{k} \beta_i \beta_j \underbrace{s(u_i, u_j)}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i^2 > 0$

und aus $\underset{\neq 0}{v_-} = \sum_{i=k+1}^{k+\ell} \beta_i u_i$ folgt $s(v_-, v_-) = \sum_{i,j=k+1}^{k+\ell} \beta_i \beta_j \underbrace{s(u_i, u_j)}_{-\delta_{ij}} = -\sum_{i=k+1}^{k+\ell} \beta_i^2 < 0$]

3.) Sei W ein Untervektorraum von V mit $\forall_{w \in W - \{0\}} \; s(w,w) \begin{Bmatrix} > 0 \\ < 0 \end{Bmatrix}$

Dann folgt $\dim W \leq \begin{Bmatrix} k \, (= \dim V_+) \\ \ell \, (= \dim V_-) \end{Bmatrix}$.

[Beweis im oberen Fall (Rest analog): Wir zeigen zunächst, daß

$$W \cap (V_- \oplus V_0) = \{0\} .$$

Beweis hiervon indirekt: Angenommen es existiert

$w \in W \cap (V_- \oplus V_0) - \{0\}$. Dann gilt $s(w,w) > 0$ und $w = \sum_{i=k+1}^{m} \beta_i u_i$,

also

$$0 < s\Big(\sum_{i=k+1}^{m} \beta_i u_i, \sum_{j=k+1}^{m} \beta_j u_j\Big) = \sum_{i=k+1}^{m} \underbrace{\beta_i^2}_{\geq 0} \underbrace{s(u_i, u_i)}_{\leq 0} \leq 0 ,$$

also $0 < 0$ Widerspruch!

Nunmehr folgt

$$\dim W + \underbrace{\dim (V_- \oplus V_0)}_{\ell+m} = \underbrace{\dim(W+(V_-\oplus V_0))}_{\leq n \ (\subset V)} - \underbrace{\dim (W\cap (V_-\oplus V_0))}_{=0},$$

also $$\dim W \leq n-\ell-m = k. \ ]$$

4.) Sei nun $\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ eine weitere Basis von V derart, daß

$$\forall_{i,j\in\{1,\dots,n\}} s(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{für } i\in\{1,\dots,\tilde{k}\} \\ -\delta_{ij} & \text{für } i\in\{\tilde{k}+1,\dots,\tilde{k}+\tilde{\ell}\} \\ 0 & \text{für } i\in\{\tilde{k}+\tilde{\ell}+1,\dots,n\} \end{cases}$$

mit $\tilde{k}, \tilde{\ell}, \tilde{m} \in \mathbb{N}$, $\tilde{k}+\tilde{\ell}+\tilde{m} = n$.

Dann folgt wie in 2., daß $V_0 = \operatorname{Spann}\{\tilde{u}_{\tilde{k}+\tilde{\ell}+1}, \dots, \tilde{u}_n\}$, insbes. $\tilde{m} = m$. Mit

$$\tilde{V}_+ := \operatorname{Spann}\{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{\tilde{k}}\}, \quad \tilde{V}_- := \operatorname{Spann}\{\tilde{u}_{\tilde{k}+1}, \dots, \tilde{u}_{\tilde{k}+\tilde{\ell}}\}$$

gilt also

$$V = \tilde{V}_+ \oplus \tilde{V}_- \oplus V_0.$$

Nach 2.) gilt $\forall_{w\in\tilde{V}_+\setminus\{0\}} s(w,w) > 0$, also folgt aus 3.) mit $W := \tilde{V}_+$:

$$\dim W \leq k$$
$$\| \ \tilde{k}$$

Die Rollen von $\mathcal{A}$ und $\tilde{\mathcal{A}}$ und damit auch von V_+ und $\tilde{V}_+$ in diesem Beweis sind vertauschbar, also gilt mit $\tilde{k} \leq k$ zugleich $k \leq \tilde{k}$ und damit auch $\tilde{k} = k$ und sodann auch $\tilde{\ell} = n - \tilde{k} - \tilde{m} = n - k - m = \ell$.

Damit ist auch (iii) bewiesen.

5.) Zu (iii): Nach 2.) ist V_+ ein k-dim Unterrechtsraum von V mit $\forall_{v\in V_+\setminus\{0\}} s(v,v) > 0$. Andererseits gilt

nach 3.) für jeden Untervektorraum W von V mit $\forall_{v \in W - \{0\}} s(v,v) > 0$: $\dim W \leq k$. Damit ist die 1. Aussage von (iii) klar, und die 2. Aussage folgt analog. Die 3. Aussage von (iii) wurde bereits in 2.) bewiesen,

Q.E.D.

9.8 Beispiel

(i) Seien $k, l, m \in \mathbb{N}$ mit $k+l+m = n \in \mathbb{N}_+$.

Dann wird auf K^n (K bel. Körper) durch

$$\forall_{x,y \in K^n} s(x,y) := x_1 y_1 + \ldots + x_k y_k - x_{k+1} y_{k+1} - \ldots - x_{k+l} y_{k+l}$$

eine symmetrische Bilinearform $s : K^n \times K^n \longrightarrow K^n$ definiert derart, daß gilt mit $\mathcal{A} = (e_1, \ldots, e_n)$:

$$M_{\mathcal{A}}(s) = \left(s(e_i, e_j)\right)_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} k \\ \\ \\ \} l \\ \\ \\ \} m \end{matrix}$$

(ii) Im Spezialfall $K = \mathbb{R}$, $k = n-1$, $l = 1$, $m = 0$ erhält man die „Lorentz'sche Metrik"

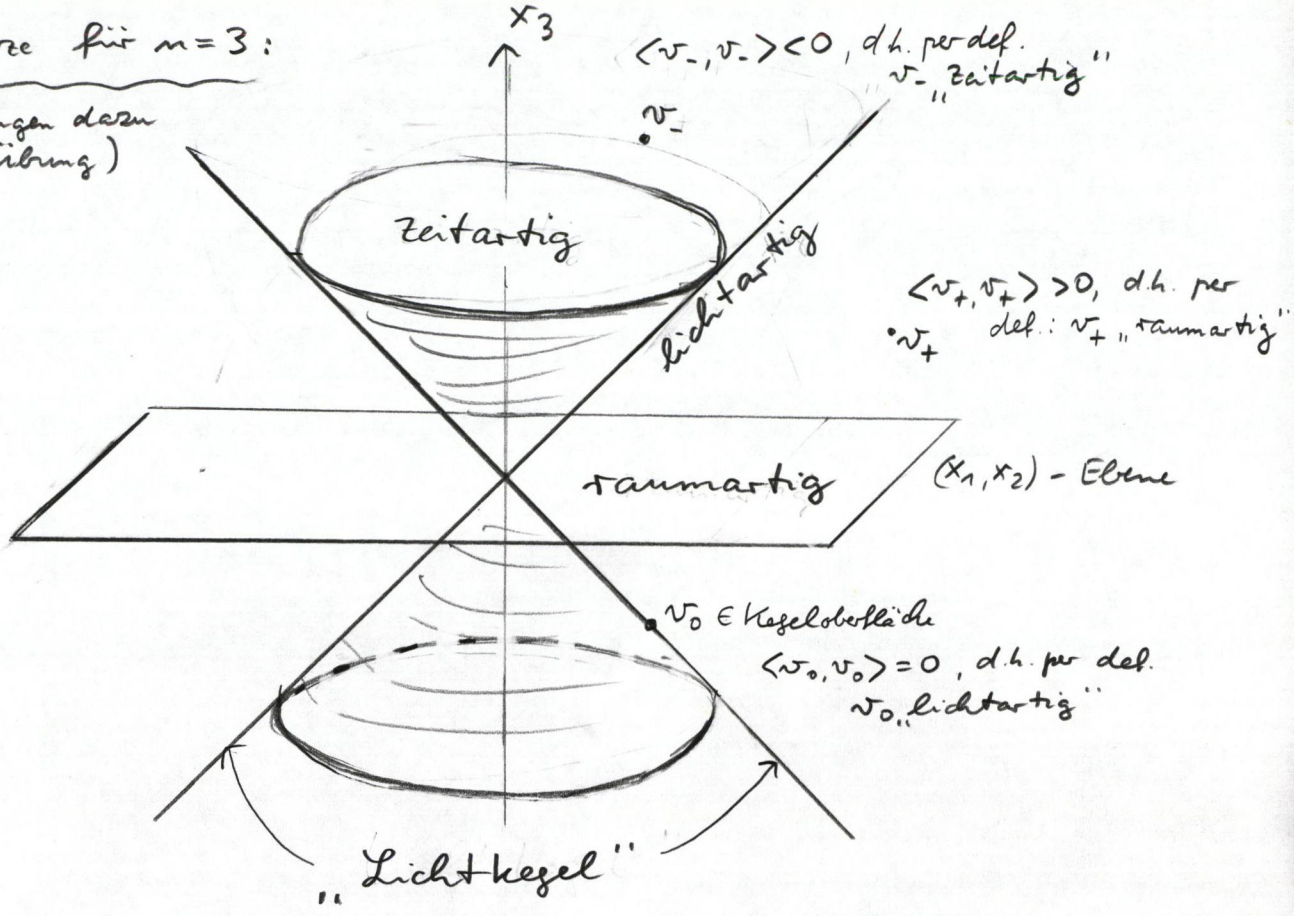
$$s(x,y) = x_1 y_1 + \ldots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n$$

auf $\mathbb{R}^n$.

Sie spielt im Fall $n = 4$ in der Speziellen Relativitäts-theorie eine entscheidende Rolle.

Skizze für $n=3$:

(Rechnungen dazu als Übung)



$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{V_+}_{\substack{2\text{-dim.} \\ \text{raumartig}}} \oplus \underbrace{V_-}_{\substack{1\text{-dim.} \\ \text{zeitartig}}}$$

Es gibt viele Möglichkeiten, $\mathbb{R}^3$ auf diese Weise als direkte Summe zu schreiben.

Ende der linearen Algebra II.

W. Henke
M. Welter

WS 02/03

1. Übung zur Linearen Algebra I

(Abgabetermin: Mittwoch, den 30.10.2002, in den Übungsgruppen)

Aufgabe 1.
Beweisen Sie die folgenden Regeln des logischen Schließens:

s (i) Satz 1.3 (4),(8),(12)
m (ii) Satz 1.3 (7),(10),(11)

Aufgabe 2. s
Negieren Sie die folgenden Aussagen:

(i) In jeder Kölner Straße gibt es mindestens ein Haus, wo in jedem Zimmer ein Fenster geöffnet ist.
(ii) (Parallelenaxiom der ebenen euklidischen Geometrie)
Zu jeder Geraden g der Ebene E und jedem Punkt p in E, der nicht auf g liegt, gibt es genau eine zu g parallele Gerade $\tilde{g}$ durch p.
(iii) In jeder deutschen Stadt gibt es eine Familie, in der jedes Familienmitglied genau ein Haustier besitzt.

Aufgabe 3. s
In einem Tempel sitzen drei Götter in unbekannter Reihenfolge. Es sind: Der Gott der Wahrheit, der immer die Wahrheit sagt; der Gott der Lüge, der immer lügt; und der Gott der Diplomatie, der unvorhersagbar lügt oder die Wahrheit sagt. Auf die Frage, wer der Gott in der Mitte (also der 2. Gott) sei, antworten sie:

1. Gott: „Der Gott der Wahrheit."
2. Gott: „Der Gott der Diplomatie."
3. Gott: „Der Gott der Lüge."

Man folgere aus diesen Angaben die Sitzordnung der Götter. Ist die Lösung eindeutig?

Aufgabe 4. s
Seien A, B und C beliebige Aussagen. Prüfen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:

(i) $(A \Rightarrow (B \vee C)) \Longleftrightarrow ((A \wedge (\neg B)) \Rightarrow C)$
(ii) $(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow ((A \wedge (\neg B)) \Rightarrow (\neg A))$
(iii) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Longleftrightarrow (A \Rightarrow C)$

Aufgabe 5. m
Seien A, B, C Mengen. Beweisen Sie

(i) $$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

(ii)
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

(iii)
$$\begin{aligned} A \subset B &\Leftrightarrow A \cup B = B \\ &\Leftrightarrow A \cap B = A \\ &\Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset \end{aligned}$$

Aufgabe 6. s
Seien M, N, P Mengen.

(i) Falls $M, N \subset P$, so gilt:
$$N \subset M \Leftrightarrow (P \setminus M \subset P \setminus N).$$
Gilt dies auch ohne die Voraussetzung $M, N \subset P$?

(ii) Prüfen Sie nach, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:
a) $M \setminus (N \setminus P) = (M \setminus N) \setminus P$
b) $(M \cap N) \cup P = (M \cup N) \cap P$
c) $((N \subset M) \wedge (M \cap N = \emptyset)) \Rightarrow N = \emptyset$
Anleitung: Wahre Aussagen sind zu beweisen, falsche durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen.

***

Hinweise:

1) »m« bedeutet mündlich; »s« bedeutet schriftlich.
2) Die Übungsblätter sind auch im Internet unter der Adresse
`http://www.mi.uni-koeln.de/~mwelter/la0203/index.html`
zu finden.
3) Die **Klausur** zur Linearen Algebra I findet statt am Samstag, den 08.02.2003, von 9.30 bis 12.30 Uhr in der Aula.

Bücher zur Linearen Algebra (=: L. A.)

A. Beutelsbacher: L. A., 5. Auflage, Vieweg 2001
S. Bosch: L. A., Springer 2001
E. Brieskorn: L. A. und Analytische Geometrie I/II, Vieweg 1983/1985
G. Fischer: L. A., 13. Auflage, Vieweg 2002
(hierzu: Übungsbuch von H. Stroppel, 3. Auflage, Vieweg 2001)
W. Greub: Linear Algebra (Graduate Texts in Mathematics) Springer 1995
K. Jänich: L. A., 9. Auflage, Springer 2002
M. Koecher: L. A. und Analytische Geometrie, 4. Auflage, Springer 1999

W. Henke
M. Welter

WS 02/03

2. Übung zur Linearen Algebra I

(Abgabetermin: Mittwoch, den 06.11.2002, in den Übungsgruppen)

s Aufgabe 7:
Zeige, daß für beliebige Mengen X_1, X_2, Y_1, Y_2 gilt:

$$((X_1, X_2) = (Y_1, Y_2)) \Longleftrightarrow (X_1 = Y_1 \ \wedge \ X_2 = Y_2)\,.$$

s Aufgabe 8:
Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Weiter seien $M, N \subset A$ und $\tilde{M}, \tilde{N} \subset B$. Zeige

(1) $$f[M \cup N] = f[M] \cup f[N]$$

(2) $$\overset{-1}{f}[\tilde{M} \cup \tilde{N}] = \overset{-1}{f}[\tilde{M}] \cup \overset{-1}{f}[\tilde{N}]$$

(3) $$f[M \cap N] \subset f[M] \cap f[N]$$

(4) $$\overset{-1}{f}[\tilde{M} \cap \tilde{N}] = \overset{-1}{f}[\tilde{M}] \cap \overset{-1}{f}[\tilde{N}]$$

Zeige durch Angabe eines Beispieles, daß in (3) i.a. nicht $=$ gilt.

Aufgabe 9:
Sei M eine Menge. Zeige:

s (i) Es existiert eine injektive Abbildung $M \to \mathfrak{P}(M)$.

s (ii) Es existiert keine surjektive Abbildung $M \to \mathfrak{P}(M)$.
Zusatz: Für jede Abbildung $f : M \to \mathfrak{P}(M)$ gilt

$$A := \{p \in M \mid p \notin f(p)\} \in \mathfrak{P}(M) \setminus f[M].$$

m (iii) In einem Dorf lebt ein Barbier, der genau diejenigen Männer des Dorfes rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Entscheiden Sie, ob sich der Barbier selbst rasiert oder nicht.
Wie kann man den Zusatz zu (ii) zu Rate ziehen um zu erkennen, daß dies kein Grund ist, an der (Widerspruchsfreiheit der) Mathematik zu zweifeln?

m Aufgabe 10:
Seien A, B, C, D Mengen. Zeige:

(1) $$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset)$$

(2) $$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

(3) $$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

(4) $$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$$

(5) $$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

Zeige, dass (5) mit $\cup$ statt $\cap$ i.a. nicht gilt.

s Aufgabe 11:
Beweise oder widerlege, dass für jede Abbildung $f : M \to N$ und je zwei Teilmengen M_1, M_2 von M stets gilt:

(i) $f[M_1] \setminus f[M_2] \subset f[M_1 \setminus M_2]$,
(ii) $f[M_1] \setminus f[M_2] \supset f[M_1 \setminus M_2]$.

s Aufgabe 12: (Wie man eine Menge „duplizieren“ kann)
Sei M eine Menge. Zeige: Es existieren eine Menge M' mit $M \cap M' = \emptyset$ und eine bijektive Abbildung $f : M \to M'$.
Zusatz: Man kann M', f wie folgt wählen: Auf Grund von 2.8(i) existiert eine Menge q mit $q \notin \bigcup(\bigcup M)$. Dann ist $M' := M \times \{q\}$ eine Menge mit $M \cap M' = \emptyset$ und es existiert genau eine bijektive Abbildung $f : M \to M'$ mit $f(p) = (p, q)$ für alle $p \in M$.

W. Henke
M. Welter

WS 02/03

3. Übung zur Linearen Algebra I

(Abgabetermin: Mittwoch, den 13.11.2002, in den Übungsgruppen)

m Aufgabe 13:
Seien A_1, A_2, A_3 Mengen und $f_1 : A_1 \to A_2, f_2 : A_2 \to A_3$ Abbildungen, also $f_2 \circ f_1 : A_1 \to A_3$ Abbildung. Zeige:

(i)

$$f_1 \text{ und } f_2 \left\{ \begin{array}{c} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{array} \right\} \Longrightarrow f_2 \circ f_1 \left\{ \begin{array}{c} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{array} \right\}$$

Belegen Sie durch Beispiele, daß "$\Longleftarrow$" jeweils falsch ist.

(ii)

$$\begin{aligned} f_2 \circ f_1 \text{ injektiv} &\Longrightarrow f_1 \text{ injektiv}, \\ f_2 \circ f_1 \text{ surjektiv} &\Longrightarrow f_2 \text{ surjektiv}. \end{aligned}$$

s Aufgabe 14:
Seien A eine Menge, R eine Äquivalenzrelation auf A und $a, b \in A$. Zeige:

(i) a ist äquivalent zu b modulo $R \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R$.
(ii) a ist nicht äquivalent zu b modulo $R \Leftrightarrow [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Aufgabe 15:
Bei dieser Aufgabe sollen die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen sowie die Addition, Subtraktion und Multiplikation in $\mathbb{Z}$ als bekannt vorausgesetzt werden. Zeige:

m (i) Sei $n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Dann existiert genau eine Äquivalenzrelation R_n auf $\mathbb{Z}$ mit

$$\forall_{a,b \in \mathbb{Z}} \quad (aR_nb \ :\Longleftrightarrow \ n|(a-b) \ \text{ (d.h. } n \text{ teilt } a-b))$$

Beschreibe $[a]_{R_n}$ für $a \in \mathbb{Z}$.
Bemerkung: Statt "aR_nb" schreibt man üblicherweise "$a \equiv b \bmod n$".

s (ii) Es existiert genau eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ (wobei $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) mit

$$\forall_{(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*} \quad ((a,b) \sim (c,d) :\Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c)$$

Man definiert dann die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen durch

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim$$

Eine rationale Zahl ist also eine Äquivalenzklasse

$$[(a,b)]_\sim = \{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* | (a,b) \sim (c,d)\} \in \mathfrak{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$$

Man schreibt $\frac{a}{b}$ für $[(a,b)]_\sim$. Dann gilt stets

$$\forall_{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*} \forall_{c\in\mathbb{Z}^*} \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$$

Definition: *Sei A eine Menge und sei S ein "System von nicht-leeren Teilmengen von A", d.h. per def.: S ist eine Teilmenge von $\mathfrak{P}(A)$ und alle Elemente von S sind nichtleere Teilmengen von A. Dann heißt per def. S eine Zerlegung von A, wenn gilt:*

1.) $\forall_{X,Y\in S} (X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset)$ *und*
2.) $\bigcup S = \bigcup_{X\in S} X = A$

s Aufgabe 16:
Sei A eine Menge. Zeige:

(i) Ist R ist eine Äquivalenzrelation auf A, so ist A/R ist eine Zerlegung von A.

(ii) Ist S ist eine Zerlegung von A, so existiert genau eine Äquivalenzrelation R_S auf A mit

$$\forall_{a,b\in A} (aR_Sb \Leftrightarrow \exists_{X\in S}\, a \in X \wedge b \in X).$$

(iii) $R \mapsto A/R$ ist eine bijektive Abbildung der Menge aller Äquivalenzrelationen auf A auf die Menge aller Zerlegungen von A und besitzt $S \mapsto R_S$ als Umkehrabbildung.

s Aufgabe 17:
Seien M und N zwei Mengen, $M \neq \emptyset$. Zeige:

Es existiert eine injektive Abbildung $f : M \to N$
$\Leftrightarrow$ Es existiert eine surjektive Abbildung $g : N \to M$.
(Tip: Benutze das Auswahlaxiom.)

W. Henke
M. Welter

WS 02/03

4. Übung zur Linearen Algebra I

(Abgabetermin: Mittwoch, den 20.11.2002, in den Übungsgruppen)

Definition: *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge M, d.h. per def.: I ist eine Menge und $\overset{I\to\mathfrak{P}(M)}{i\mapsto M_i}$ ist eine Abbildung mit der Bildmenge $\{M_i|i\in I\}\subset\mathfrak{P}(M)$. Wir definieren dann*

$$\bigcup_{i\in I} M_i := \bigcup\{M_i|i\in I\} \underset{2.6}{=} \{p\in M|\exists_{i\in I}\, p\in M_i\}$$

und

$$\bigcap_{i\in I} M_i := \bigcap\{M_i|i\in I\} \underset{2.9}{=} \{p\in M|\forall_{i\in I}\, p\in M_i\}\,.$$

m Aufgabe 18:

(i) Sei $f: M\to N$ eine Abbildung, sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von M und sei $(N_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von N. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f[\bigcup_{i\in I} M_i] &= \bigcup_{i\in I} f[M_i]\\
\overset{-1}{f}[\bigcup_{i\in I} N_i] &= \bigcup_{i\in I} \overset{-1}{f}[N_i]\\
f[\bigcap_{i\in I} M_i] &\subset \bigcap_{i\in I} f[M_i]\\
\overset{-1}{f}[\bigcap_{i\in I} N_i] &= \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{f}[N_i]
\end{aligned}$$

(ii) Sei X eine beliebige Menge. Zeige: Für jedes $Y\in X$ gilt $Y\subset\bigcup X$, also ist $(Y)_{Y\in X}$ eine Familie von Teilmengen der Menge $\bigcup X$. Der Spezialfall $I:=X, M:=\bigcup X, \forall_{Y\in X} M_Y := Y$ der obigen Definition liefert

$$\bigcup_{Y\in X} Y = \bigcup\underbrace{\{Y|Y\in X\}}_{X} = \bigcup X,\quad \bigcap_{Y\in X} Y = \bigcap\underbrace{\{Y|Y\in X\}}_{X} = \bigcap X$$

in Übereinstimmung mit unseren früheren Bezeichnungen in 2.6 und 2.9.

s Aufgabe 19:
Seien $f : M \to N, g : N \to K$ Abbildungen und $A, A_1, A_2 \subset M$, $B, B_1, B_2 \subset N$, $C \subset K$. Zeige:

(i) $(g \circ f)[A] = g[f[A]]$,
$(g \circ f)^{-1}[C] = \overset{-1}{f}[\overset{-1}{g}[C]]$,

(ii) $f[\overset{-1}{f}[B]] = f[M] \cap B \subset B$ mit Gleichheit, falls f surjektiv
$\overset{-1}{f}[f[A]] \supset A$ mit Gleichheit, falls f injektiv

(iii) $f[A_1 \setminus A_2] \supset f[A_1] \setminus f[A_2]$ mit Gleichheit, falls f injektiv
$\overset{-1}{f}[B_1 \setminus B_2] = \overset{-1}{f}[B_1] \setminus \overset{-1}{f}[B_2]$

s Aufgabe 20:
Sei A eine Menge. Nach 2.16 bezeichnet 2^A die Menge $\{f | f : A \to \underset{=2}{\{0,1\}}\}$ und A^2 bezeichnet die Menge $\{f | f : \underset{=2}{\{0,1\}} \to A\}$.

(i) Gib eine kanonische bijektive Abbildung $F : 2^A \to \mathfrak{P}(A)$ an.
(ii) Gib eine kanonische bijektive Abbildung $G : A^2 \to A \times A$ an.

Aufgabe 21:
Seien A, B, C beliebige Mengen. Zeige (ohne Benutzung des Auswahlaxioms):

m (i) $(\#A = \#B) \wedge (\#B \leq \#C) \Longrightarrow \#A \leq \#C$
$(\#A \leq \#B) \wedge (\#B = \#C) \Longrightarrow \#A \leq \#C$
s (ii) $(\#A \leq \#B) \wedge (\#B < \#C) \Longrightarrow \#A < \#C$
$(\#A < \#B) \wedge (\#B \leq \#C) \Longrightarrow \#A < \#C$

s Aufgabe 22: ($\mathbb{R}^n$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$)
Beweise: **(i)** $\#(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \#\mathbb{R}$, **(ii)** $\forall_{n \in \mathbb{N}_+} \#(\mathbb{R}^n) = \#\mathbb{R}$.
(Tip zu (i): Bekanntlich ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar, also ist wegen $\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$ auch $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ abzählbar, folglich gilt $\#\mathfrak{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \#\mathfrak{P}(\mathbb{N})$. Beweise dann $\#(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \leq \#\mathfrak{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ ähnlich wie Aussage (1) im Beweis von 2.33 ...)

*****

s Aufgabe 23: (eine Extra-Aufgabe für Experten)
Seien M, N Mengen und $i : M \to N$ eine injektive Abbildung. (Dann enthält also N die zu M gleichmächtige Menge $\tilde{M} := i[M]$ als Teilmenge). Zeige: Es existiert eine Menge N' mit $\#N = \#N'$ und $M \subset N'$.
(Tip: Benutze Aufgabe 12.)

W. Henke
M. Welter

WS 02/03

5. Übung zur Linearen Algebra I

(Abgabetermin: Mittwoch, den 27.11.2002, in den Übungsgruppen)

m Aufgabe 24:
Definition: *Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe (mit neutralem Element e) und $U \subset G$. U heißt* Untergruppe (von G) *genau dann, wenn $(U, \cdot)$ eine Gruppe ist.*
Zeigen Sie, daß für eine nichtleere Teilmenge $U \subset G$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

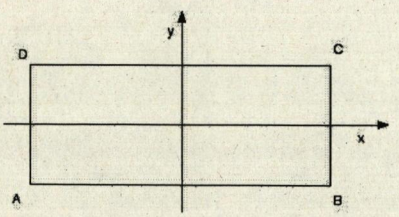
(U1) U ist eine Untergruppe.
(U2) Für alle $x, y \in U$ gilt: $x^{-1} \in U$ und $x \cdot y \in U$.
(U3) Für alle $x, y \in U$ gilt: $x \cdot y^{-1} \in U$.

Aufgabe 25:

s (i) Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeigen Sie (vgl. Vorlesung 3.2):
a) $(S(M), \circ)$ ist eine Gruppe für jede Menge $M \neq \emptyset$. Insbesondere ist S_n eine Gruppe.
b) $\#S_n = n!$.
c) Für $n \geq 3$ ist S_n nicht abelsch.

m (ii) a) Wir betrachten die Drehungen um den Ursprung des $\mathbb{R}^2$ und Orthogonal-Spiegelungen an Geraden des $\mathbb{R}^2$, die das folgende Rechteck A, B, C, D in sich überführen (sog. Deckbewegungen):

$$D_0 = \text{Drehung um } 0°$$
$$D_{180} = \text{Drehung um } 180°$$
$$S_x \text{ bzw. } S_y = \text{Spiegelung an der } x- \text{ bzw. } y-\text{Achse}$$



Stellen Sie eine Verknüpfungstafel für das algebraische Gebilde $(V, \circ) := (\{D_0, D_{180}, S_x, S_y\}, \circ)$ auf, wobei $\circ$ die Hintereinanderausführung der Deckbewegungen ist. Suchen Sie in der Tafel neutrale und inverse Elemente. Ist das Gebilde kommutativ? Zeigen Sie, daß $(V, \circ)$ eine Untergruppe von $(S(\mathbb{R}^2), \circ)$ ist.

b) Wir setzen

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_2 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß $(V_4, \circ) := (\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \circ)$ eine Untergruppe von S_4 ist.

c) Geben Sie einen Isomorphismus zwischen $(V, \circ)$ und $(V_4, \circ)$ an.

s Aufgabe 26:

(i) Zeigen Sie, daß zu jedem $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ ein eindeutig bestimmtes $(d, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit

$$p = dq + r \text{ und } 0 \leq r < q$$

existiert.
(Tip: Zeigen Sie, daß ein $d \in \mathbb{Z}$ mit $dq \leq p < (d+1)q$ existiert.)

(ii) Es sei $H \subset \mathbb{Z}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$n\mathbb{Z} := \{nk | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Zeigen Sie:
H ist ein Untergruppe von $\mathbb{Z}$, d.h. von $(\mathbb{Z}, +) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : H = n\mathbb{Z}$.

(Bemerkung: Die Aussage in (i) ist unter dem Namen *Euklidischer Divisionsalgorithmus* bekannt.)

s Aufgabe 27:
Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und für jedes $a \in G$ sei $L_a : G \to G$ mit $L_a(b) = ab$ für alle $b \in G$ die Linksmultiplikation mit a, also $L_a \in S(G)$, d.h. $L_a : G \to G$ bijektiv.
Zeigen Sie, daß

$$\begin{aligned} L : G &\to S(G) \\ a &\mapsto L_a \end{aligned}$$

ein injektiver Gruppen-Homomorphismus ist.
Folgern Sie dann, daß jede Gruppe G zu einer Untergruppe von $S(G)$ isomorph ist. Insbesondere ist jede endliche Gruppe mit n Elementen isomorph zu einer Untergruppe von S_n.

s Aufgabe 28:
Wir betrachten die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:
$K_1 := \left\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ und $K_2 := \left\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.
Untersuchen Sie, ob $(K_1, +, \cdot)$ und $(K_2, +, \cdot)$ Körper bzw. Ringe sind.

W. Henke
M. Welter

WS 02/03

6. Übung zur Linearen Algebra I

(Abgabetermin: Mittwoch, den 4.12.2002, in den Übungsgruppen)

s Aufgabe 29:
Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Für $g \in G$ heißt die Menge

$$gU := \{h \in G | \exists_{u \in U} \ h = gu\} \subset G$$

eine *Linksnebenklasse von U in G*. Zeigen Sie nun :

(i) Für $g \in G$ ist $\#gU = \#U$.

(ii) Für $g, h \in G$ gilt entweder $gU \cap hU = \emptyset$ oder $gU = hU$.

(iii) Ist G und damit auch U eine endliche Gruppe, so existieren Elemente $g_1, \ldots, g_r \in G$, so daß

$$G = \dot{\bigcup_{i=1}^{r}} g_i U,$$

folglich ist die Ordnung von U ein Teiler der Ordnung von G. Dabei ist die *Ordnung* einer endlichen Gruppe definiert als die Anzahl der Elemente der Gruppe.

m Aufgabe 30:
Es seien G und H Gruppen mit neutralen Elementen e_G bzw. e_H und $f : G \to H$ ein Gruppen-Homomorphismus. Zeigen Sie:

(i) $f(e_G) = e_H$,

(ii) $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ für alle $g \in G$,

(iii) Bild$f := f(G)$ ist eine Untergruppe von H,

(iv) Kern$f := f^{-1}(e_H) = \{g \in G | f(g) = e_H\}$ ist eine Untergruppe von G. Darüber hinaus hat $N :=$Kern$f$ die folgende Eigenschaft:

$$\forall_{g \in G} \forall_{x \in N} \ gxg^{-1} \in N.$$

Eine Untergruppe mit dieser Eigenschaft nennt man einen *Normalteiler* in G.

(v) f ist genau dann injektiv, wenn der Kern von f trivial ist, d.h. wenn Kern$f = \{e_G\}$ gilt.

s Aufgabe 31:
Es sei G eine Gruppe.

(i) Sei $a \in G$. Wir setzen $a^0 := e_G$ und $a^{n+1} := a^n a$ für $n \in \mathbb{N}$. Weiter setzen wir $a^{-n} := (a^{-1})^n$ für $n \in \mathbb{N}_+$. Zeigen Sie, daß $\langle a \rangle := \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe von G ist, genauer die kleinste Untergruppe, die a als Element enthält, und daß $\langle a \rangle$ abelsch ist. Man nennt $\langle a \rangle$ *die von a erzeugte Untergruppe von G.*
Zeigen Sie weiter, daß die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \langle a \rangle$ mit $\forall_{n \in \mathbb{Z}}\ f(n) = a^n$ ein surjektiver Gruppen-Homomorphismus ist.

(ii) Folgern Sie: Ist G speziell eine endliche Gruppe der Ordnung $k \in \mathbb{N}_+$, so gilt:

$$\forall_{g \in G} \exists_{n \in \mathbb{N}_+}\ g^n = e_G.$$

Man setzt $\mathrm{ord}(g) := \min\{n \in \mathbb{N}_+ | g^n = e_G\}$ und nennt $\mathrm{ord}(g)$ die *Ordnung von g.*
Beweisen Sie, dass $\mathrm{ord}(g)$ die Gruppenordnung k teilt.
(Tip: Euklidischer Divisionsalgorithmus und Aufgabe 29)

(iii) G heißt *zyklisch*, wenn es ein $g \in G$ mit $\langle g \rangle = G$ gibt. Folgern Sie aus (ii), daß Gruppen von Primzahlordnung stets zyklisch sind.

Aufgabe 32:

s (i) Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Beweise: Der Restklassenring $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.
(Tip zu "$\Leftarrow$": Sei $n = p$ eine Primzahl und sei $r \in \{1, \ldots, p-1\}$, also $\overline{r} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$. Dann ist die Abbildung $\{0, \ldots, p-1\} \to \mathbb{Z}_p, s \mapsto \overline{rs} = \overline{r}\,\overline{s}$, injektiv, also auch surjektiv. . . .)

m (ii) Seien $R_1 = (R_1, +, \cdot), R_2 = (R_2, +, \cdot)$ zwei Ringe. Auf der Menge $R := R_1 \times R_2$ definieren wir eine Addition $+ : R \times R \to R$ und eine Multiplikation $\cdot : R \times R \to R$ durch

$$\begin{aligned} \forall_{\substack{r_1, s_1 \in R_1 \\ r_2, s_2 \in R_2}}\ (r_1, r_2) + (s_1, s_2) &:= (r_1 + s_1, r_2 + s_2) \\ (r_1, r_2) \cdot (s_1, s_2) &:= (r_1 s_1, r_2 s_2). \end{aligned}$$

Zeige: Dann ist auch $(R, +, \cdot)$ ein Ring.
Im Fall $R_1 \neq \{0_{R_1}\}$, $R_2 \neq \{0_{R_2}\}$ ist R kein Körper (auch nicht, wenn R_1 und R_2 Körper sind).

m (iii) Sei $(G,+)$ eine abelsche Gruppe und sei $R := \{f : G \to G | f$ Gruppen-Homomorphismus$\}$. Für $f_1, f_2 \in R$ definieren wir $f_1 + f_2 : G \to G$ durch $\forall_{a \in G}\ (f_1 + f_2)(a) := f_1(a) + f_2(a)$ und $f_1 \circ f_2 : G \to G$ wie üblich durch $\forall_{a \in G}\ (f_1 \circ f_2)(a) := f_1(f_2(a))$.
Zeige: Dann ist $(R, +, \circ)$ ein unitärer Ring.

s Aufgabe 33:
Sei K ein Körper. $F : K[t] \to K^K$ ordne jedem Polynom $a = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \in K[t]$ die *Polynomfunktion* $F(a) : K \to K$ mit $\forall_{x \in K}\ (F(a))(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ zu. Zeige:

(i) $F : K[t] \to K^K$ ist ein Ring-Homomorphismus des Rings $K[t]$ (vgl. 3.8) in den Ring K^K (vgl. 4.2).

(ii) Im Fall eines endlichen Körpers ist F nicht injektiv.
(Tip: $K = \{k_1, \ldots, k_r\}, a := (t - k_1) \cdot \ldots \cdot (t - k_r) \in K[t] \setminus \{0\}$.) Wir werden später zeigen, daß im Fall eines unendlichen Körpers F stets injektiv ist.

*****

Hinweis:
Die **Nachschreibeklausur** zur Linearen Algebra I wird am Dienstag, den 25.3.2003, von 9.30 bis 12.30 Uhr im Hörsaal I (WISO-Gebäude) geschrieben.

A α alpha	I ι iota	P ϱ rho
B β' beta	K κ kappa	Σ σ sigma
Γ γ gamma	Λ λ lambda	T τ tau
Δ δ delta	M μ my	Υ υ ypsilon
E ϵ epsilon	N ν ny	Φ ϕ phi
Z ζ zeta	Ξ ξ xi	X χ chi
H η eta	O o omikron	Ψ ψ psi
Θ ϑ theta	Π π pi	Ω ω omega

W. Henke
M. Welter

WS 02/03

7. Übung zur Linearen Algebra I

(Abgabetermin: Mittwoch, den 11.12.2002, in den Übungsgruppen)

m Aufgabe 34:
Sei V ein K-Vektorraum.

(i) Es seien $v_1, \ldots, v_r \in V$ $(r \in \mathbb{N}_+)$. Zeige:

a) $v_1, \ldots, v_r$ linear $\left\{ \begin{array}{c} \text{unabhängig} \\ \text{abhängig} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall_{\sigma \in S_r}\ v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}$ linear $\left\{ \begin{array}{c} \text{unabhängig} \\ \text{abhängig} \end{array} \right\}$.

b) $\left(\exists_{i,j \in \{1,\ldots,r\}, i \neq j}\ v_i = v_j\right) \Rightarrow v_1, \ldots, v_r$ linear abhängig.

c) v_1 linear unabhängig $\Leftrightarrow v_1 \neq 0_V$.

(ii) Seien $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume.

a) Zeigen Sie, daß

$$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

ein Untervektorraum von V ist.

b) Beweisen Sie, daß die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(I) $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$.

(II) Jedes $v \in U_1 + U_2$ besitzt eine eindeutige Darstellung $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$, d.h. aus $u_1 + u_2 = u_1' + u_2'$ mit $u_1, u_1' \in U_1, u_2, u_2' \in U_2$ folgt $u_1 = u_1'$ und $u_2 = u_2'$.

(Falls (I) und (II) erfüllt sind, schreibt man $U_1 \oplus U_2 := U_1 + U_2$ und nennt $U_1 \oplus U_2$ die *direkte Summe* der Untervektorräume U_1 und U_2.)

s Aufgabe 35: (Charakteristik eines Körpers)
Es sei K ein Körper mit Null- bzw. Einselement 0_K bzw. 1_K. Für $n \in \mathbb{N}_+$ und $a \in K$ definieren wir

$$n \cdot a := \sum_{i=1}^{n} a := \underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ Summanden}}.$$

$\mathrm{char}(K) \in \mathbb{N}$, die sog. *Charakteristik* von K, ist definiert durch

$$\mathrm{char}(K) := \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}_+ | n \cdot 1_K = 0_K\} & \text{, falls ein } n \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } n \cdot 1_K = 0_K \text{ existiert,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie nun:

(i) $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ und $\mathrm{char}(\mathbb{Z}_p) = p$ für alle Primzahlen p.

(ii) Sind K, L Körper mit $K \subset L$, so gilt $\mathrm{char}(K) = \mathrm{char}(L)$.

(iii) Ist $\mathrm{char}(K) = n \in \mathbb{N}_+$, so gilt $n \cdot a = 0_K$ für alle $a \in K$.

(iv) Die Charakteristik eines Körpers K ist entweder Null oder eine Primzahl.

s Aufgabe 36:

(i) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Vektoren $(1, a, a^2), (1, b, b^2), (1, c, c^2) \in \mathbb{R}^3$ genau dann linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind, wenn a, b, c paarweise verschieden sind.

(ii) Es sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß dann auch $\{w_1, \ldots, w_n\}$ mit

$$w_i := \left(\sum_{j=1}^{n} v_j\right) - v_i$$

eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist. Gilt dies auch noch, wenn man den Körper $\mathbb{R}$ durch den Körper $\mathbb{Z}_2$ ersetzt?

m Aufgabe 37:

Sei K ein Körper. Zeige: Der K-Vektorraum $K[t]$ (vgl. 4.2, 3.)) besitzt eine unendliche linear unabhängige Teilmenge.

s Aufgabe 38:

(i) Im $\mathbb{R}^4$ seien U_1 der von $M_1 := \{(1,1,2,1), (0,-2,1,0), (1,-1,3,1)\}$ und U_2 der von $M_2 := \{(3,1,7,3), (-3,2,-5,-1), (0,3,2,2)\}$ erzeugte Untervektorraum, (d.h. $U_i := \text{Span} M_i$ für $i = 1, 2$).
Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis von $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$, $U_1 + U_2$.

(ii) Seien $u := (1,1,1), v := (1,1,-1) \in \mathbb{R}^3$ und $W := \text{Span}\{u, v\}$. Finde Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, daß ein Vektor $w = (x, y, z)$ genau dann in W liegt, wenn $ax + by + cz = 0$ gilt.

******

Eine Extra-Aufgabe für Experten

s Aufgabe 39: ("Jeder Vektorraum besitzt eine Basis")

Sei V ein K-Vektorraum (K beliebiger Körper), $V \neq \{0\}$. Zeige:

(i) Es existiert eine Basis (d.h. per def. ein linear unabhängiges Erzeugendensystem) von V über K. Ist N eine nichtleere linear unabhängige Teilmenge von V, so existiert sogar eine Basis M von V über K mit $N \subset M$.

(ii) Ist M eine beliebige Basis von V über K, so läßt sich jedes Element $v \in V \setminus \{0\}$ auf genau eine Weise (bis auf die Reihenfolge der Summanden) darstellen in der Form $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, wobei $n \in \mathbb{N}_+, b_1, \ldots, b_n \in M$ paarweise verschieden und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K^*$.

(Tip zu (i): Sei $A \subset \mathfrak{P}(V)$ die Menge aller nichtleeren linear unabhängigen Teilmengen U von V mit $N \subset U$. Mit der Definition $\forall_{U_1, U_2 \in A}\ (U_1 \leq U_2 :\Leftrightarrow U_1 \subset U_2)$ wird $(A, \leq)$ zu einer geordneten Menge, und für jede Kette C in $(A, \leq)$ ist $\bigcup C$ eine obere Schranke von C in $(A, \leq)$. Nach Zornschem Lemma existiert daher ein maximales Element M von A bzgl. ...)

W. Henke
M. Welter

WS 02/03

8. Übung zur Linearen Algebra I

(Abgabetermin: Mittwoch, den 18.12.2002, in den Übungsgruppen)

m Aufgabe 40:

(i) Sei K ein Körper. Beweisen Sie, dass die Vektoren $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,0,1)$, $(1,1,1,0) \in K^4$ genau dann linear abhängig über K sind, wenn K die Charakteristik 3 hat.

(ii) Untersuchen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$, ob die Vektoren $(0,1,x)$, $(1,x,1)$, $(x,1,0) \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig oder linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind.

s Aufgabe 41:

Gegeben seien die folgenden drei Untervektorräume (!) des $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} U &:= \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}, \\ V &:= \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = x_2\right\}, \\ W &:= \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = x_3 = 0\right\}. \end{aligned}$$

(i) Bestimmen Sie Basen und die Dimension von U, V und W.

(ii) Zeigen Sie: $U + V = U + W = V + W = \mathbb{R}^3$.

(iii) Welche der Summen in (ii) sind direkt?

s Aufgabe 42:

Definition: Es sei K ein Körper. Ist $f = f_0 + f_1 t + \ldots + f_n t^n \in K[t] \setminus \{0\}$, so setze $\partial(f) := \max\{i \in \mathbb{N} | f_i \neq 0\} \in \mathbb{N}$; $\partial(f)$ heißt der *Grad von* f. $f_{\partial(f)}$ heißt der *höchste Koeffizient* oder *Leitkoeffizient von* f. Man beachte, daß für das Nullpolynom kein Grad definiert ist.

(i) Zeige, daß $\partial : K[t] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ die folgenden Eigenschaften hat:

a) $\partial(f \cdot g) = \partial(f) + \partial(g)$ für alle $f, g \in K[t] \setminus \{0\}$,

b) $\partial(f + g) \leq \max\{\partial(f), \partial(g)\}$ für alle $f, g \in K[t] \setminus \{0\}$ mit $f + g \neq 0$. Dabei tritt jedenfalls dann Gleichheit ein, wenn $\partial(f) \neq \partial(g)$.

(ii) Man beweise den "Euklidischen Divisionsalgorithmus in $K[t]$" (vgl. Aufgabe 26(i)): Zu jedem Paar (f,g) mit $f, g \in K[t], g \neq 0$ gibt es genau ein Paar (q,r) mit $q, r \in K[t]$, so daß $f = qg + r$ und entweder $r = 0$ oder $\partial(r) < \partial(g)$ gilt.
(Tip: Induktion nach $\partial(f)$.)

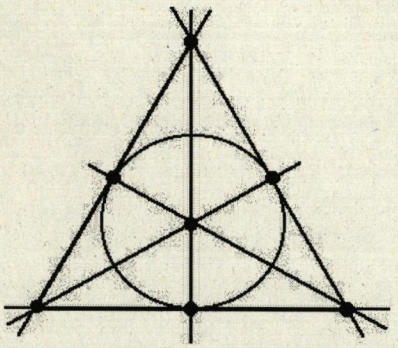
s Aufgabe 43:
Es sei K ein Körper. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $K_n[t] := \{f \in K[t] \mid \partial(f) \leq n\} \cup \{0\}$. Man überlege kurz, daß dies ein Untervektorraum von $K[t]$ ist und untersuche dann, ob die folgenden Mengen von Vektoren linear unabhängig über $\mathbb{R}$ bzw. ein Erzeugendensystem oder eine Basis von $\mathbb{R}_3[t]$ bilden:

(i) $M_1 = \{1, t-1, t^2-t, t^3-t^2\}$,
(ii) $M_2 = \{t^2-7t, t^2-1, t^2+7t\}$,
(iii) $M_3 = \{t^2-7, t^2-1, t^2+7\}$,
(iv) $M_4 = \{(t^2-1)(t-1)-1, t^2(t-1), t-1, t^2, t^3\}$.

m Aufgabe 44:
Sei V ein K-Vektorraum und sei $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung mit $f \circ f = f$. Zeige:

(i) $\forall_{a \in \text{Bild} f := f(V)}\ f(a) = a$,
(ii) V ist direkte Summe der Untervektorräume $\text{kern} f := f^{-1}(\{0\})$ und $\text{Bild} f$.

s Aufgabe 45:
Sei V der 3-dimensionale $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $(\mathbb{Z}_2)^3$. Zeigen Sie: V hat genau sieben 1-dimensionale und sieben 2-dimensionale Unterräume.
Bezeichne U_1 die Menge der 1-dimensionalen und U_2 die Menge der 2-dimensionalen Unterräume von V. Ferner sei P die Menge der sieben Punkte in der abgebildeten Figur, sowie L die Menge, deren Elemente die sechs Geraden und der Kreis in der Figur sind.
Geben Sie eine Bijektion $\varphi : U_1 \to P$ und eine Bijektion $\psi : U_2 \to L$ an, so daß folgendes gilt: Für jedes $p \in U_1$ und jedes $\ell \in U_2$ gilt $p \subset \ell$ genau dann, wenn $\varphi(p)$ auf $\psi(\ell)$ liegt.



*****

Am Mittwoch, den 11.12.2002 findet ab 20 Uhr im Seminarraum 2 des MI die traditionelle Nikolausparty statt, zu der Ihr alle herzlich eingeladen seid. Es gibt heiße Musik und kühle Getränke (und warmen Glühwein)!

Eure Fachschaft Mathematik

W. Henke
M. Welter

WS 02/03

9. Übung zur Linearen Algebra I

(Abgabetermin: Mittwoch, den 8.1.2003, in den Übungsgruppen)

s Aufgabe 46:

(i) Beweisen Sie Satz 4.20 der Vorlesung.

(ii) a) Entscheiden Sie (mit Begründung): Gibt es im $\mathbb{R}^{10}$ zwei 7-dimensionale Untervektorräume U_1, U_2 mit $\dim(U_1 \cap U_2) = 3$?

b) Seien U_1, U_2 zwei $(n-1)$-dimensionale Untervektorräume eines n-dimensionalen K-Vektorraums V mit $U_1 \neq U_2$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$. Zeigen Sie, daß dann notwendig $V = U_1 + U_2$ gilt.

s Aufgabe 47:

Sei V ein K-Vektorraum. Eine K-lineare Abbildung $f : V \to V$ mit $f \circ f = f$ heißt *idempotent* (vgl. Aufgabe 44). Seien $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ idempotent mit $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = 0$. Beweisen Sie:

(i) $f_1(V) \cap f_2(V) = \{0\}$,

(ii) $\mathrm{Kern}(f_1 + f_2) = \mathrm{Kern} f_1 \cap \mathrm{Kern} f_2$,

(iii) $(f_1(V) \oplus f_2(V)) \cap \mathrm{Kern} f_1 \cap \mathrm{Kern} f_2 = \{0\}$,

(iv) im Falle $\mathrm{Kern}(f_1 + f_2) = \{0\}$ gilt $f_1 + f_2 = id_V$.

(v) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, daß $f_1 \neq 0, f_2 \neq 0$ und $f_1 + f_2 \neq id_V$ möglich ist.

m Aufgabe 48: (Mächtigkeit endlicher Körper)

(i) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem endlichen Körper K. Beweisen Sie:

$$\#V = (\#K)^{\dim_K V}.$$

(ii) Sei L ein endlicher Körper und K ein Unterkörper von L. Zeigen Sie, daß L ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum ist, wenn man als skalare Multiplikation $K \times L \to L$ die Beschränkung der Multiplikation von L versteht.

(iii) Sei L ein endlicher Körper. Überlegen Sie zunächst, daß $K := \{n \cdot 1_L \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (vgl. Aufgabe 35) ein Teilkörper von L ist, und zeigen Sie dann, daß $\#K$ eine Primzahl ist. Man nennt K den *Primkörper von* L.

(iv) Beweisen Sie, daß die Mächtigkeit eines endlichen Körpers stets eine Primzahlpotenz ist.

s Aufgabe 49:
Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_+$ und $a_{i,j} \in K (i,j \in \{1,\ldots,n\}, i > j)$. Seien A, B die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_{21} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = A + E_n.$$

Zeigen Sie:

(i) $A^n = 0$,
(ii) B ist invertierbar, und es gilt (mit $A^0 := E_n$)

$$B^{-1} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i A^i.$$

s Aufgabe 50:

(i) Bestimmen Sie den Rang (= Zeilenrang = Spaltenrang) der reellen Matrizen A, B und AB, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 7 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens alle Lösungen des folgenden reellen linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

*****

Wir wünschen allen Hörerinnen und Hörern ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins Jahr 2003

W. Henke
M. Welter

WS 02/03

10. Übung zur Linearen Algebra I

(Abgabetermin: Mittwoch, den 15.1.2003, in den Übungsgruppen)

m Aufgabe 51:
Wir betrachten für $\alpha \in \mathbb{R}$ die lineare Abbildung

$$f_\alpha : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbf{R}}(\text{Bild}(f_\alpha))$ und $\dim_{\mathbf{R}}(\text{Kern}(f_\alpha))$ in Abhängigkeit von α.
(ii) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist f_α injektiv, surjektiv oder bijektiv?
(iii) Geben Sie für $\alpha = 2$ eine Basis des Bildes und des Kerns von f_α an, und bestimmen Sie das Urbild von $(3, -3, -21)$.

Aufgabe 52:

s (i) Zeigen Sie

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 11 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in GL(5, \mathbb{R})$$

und bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} durch Lösen der linearen Gleichungssysteme $Ax = e_i^{(5)}$ für $i = 1, \ldots, 5$.

m (ii) Es sei

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, daß A genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$ ist. Geben Sie in diesem Fall die zu A inverse Matrix explizit an.

s Aufgabe 53: (GAUSSsche Methode der kleinsten Quadrate)
Viele Naturgesetze in Physik, Biologie usw. werden durch eine lineare Abhängigkeit $y = f(x) = ax + b$ beschrieben, und es stellt sich die Aufgabe, die darin vorkommenden „Naturkonstanten“ a und b zu bestimmen. Da diese oft nicht

direkt zugänglich sind, mißt man stattdessen zu n Werten $t_1, \ldots, t_n$ die Funktionswerte $s_1, \ldots, s_n$ und berechnet die Koeffizienten einer ebenfalls linearen Näherungsfunktion $g_{\alpha,\beta}(x) = \alpha x + \beta$ so, daß die Summe der Fehlerquadrate $S(\alpha, \beta) := \sum_{i=1}^{n}(g_{\alpha,\beta}(t_i) - f(t_i))^2 = \sum_{i=1}^{n}(\alpha t_i + \beta - s_i)^2$ minimal wird. Mit Hilfe der Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen läßt sich zeigen, dass man die gesuchten Näherungswerte α, β als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\left(\frac{\partial S(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = \right) \quad 2\sum_{i=1}^{n}(\alpha t_i + \beta - s_i)t_i = 0$$

$$\left(\frac{\partial S(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = \right) \quad \sum_{i=1}^{n}(\alpha t_i + \beta - s_i) = 0$$

in den Unbekannten α, β erhält.
Zeigen Sie:

(i) Das obige lineare Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn nicht alle t_i gleich sind. Geben Sie die Lösung explizit an.

(ii) Berechnen Sie nach (i) für folgende Wertetabelle die Näherungsgerade:

t_i	1	1,5	2	2,5
s_i	1,1	1,6	1,9	2,5

(Tipp zu (i): Beachten Sie die Identität (Beweis!)

$$n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(t_i - t_j)^2.)$$

s Aufgabe 54:
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.
Definition: Eine Teilmenge X von V heißt *affiner Unterraum von V*, wenn ein $v \in V$ und ein Untervektorraum U von V existieren mit

$$X = v + U.$$

Zeige:

(i) Ist X ein affiner Unterraum von V und gilt $X = v + U$ ($v \in V, U \subset V$ Untervektorraum), so folgt $v \in X, U = \{v_1 - v_2 \mid v_1, v_2 \in X\}$ und $\forall_{v_1 \in X}\ X = v_1 + U$, insbesondere ist U durch X eindeutig bestimmt.
U heißt der *Richtungsraum von X*, und man definiert die *Dimension von X* durch $\dim X = \dim U$.
Jede einpunktige Teilmenge von V ist also ein 0-dimensionaler affiner Unterraum von V. Die 1-dimensionalen bzw. 2-dimensionalen affinen Unterräume von V heißen *Geraden* bzw. *Ebenen*, und die $(n-1)$-dimensionalen affinen Unterräume heißen *Hyperebenen*.
Aus $X = v + U = v_1 + U_1$ ($v, v_1 \in V, U$ und U_1 Untervektorräume von V) folgt $U = U_1$ und $v - v_1 \in U$.

(ii) Sei $r \leq n$, und es seien $r+1$ Elemente $v_0, v_1, \ldots, v_r \in V$ gegeben. Dann existiert stets ein r-dimensionaler affiner Unterraum von V, der $v_0, v_1, \ldots, v_r$ enthält.

Ferner sind die folgenden drei Aussagen paarweise äquivalent:

a) Es existiert *genau ein* r-dimensionaler affiner Unterraum von V, der $v_0, v_1, \ldots, v_r$ enthält.

b) Es existiert kein $(r-1)$-dimensionaler affiner Unterraum von V, der $v_0, v_1, \ldots, v_r$ enthält.

c) $v_1 - v_0, \ldots, v_r - v_0$ sind r linear unabhängige Elemente von V.

Man nennt $v_0, v_1, \ldots, v_r$ *affin unabhängig*, wenn die Bedingungen a), b), c) erfüllt sind.

s Aufgabe 55:

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Für Teilmengen $A, B \subset G$ definieren wir

$$A \cdot B := \{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

In Übereinstimmung mit Aufgabe 29 definieren wir nun die *Links- bzw. Rechtsnebenklassen einer Untergruppe U von G* durch $gU := \{g\} \cdot U$ bzw. $Ug := U \cdot \{g\}$. Zeigen Sie:

(i) Ist U ein Normalteiler in G, d.h. gilt $gU = Ug$ für alle $g \in G$ (vgl. Aufg. 30), so ist die durch $gU \odot hU := (g \cdot h)U$ definierte Verknüpfung auf $G/U := \{gU \mid g \in G\}$ wohldefiniert und $(G/U, \odot)$ ist eine Gruppe.

Man nennt G/U die *Faktorgruppe von G nach U*.

(Bemerkung: Wir schreiben in Zukunft natürlich $gU \cdot hU$ statt $gU \odot hU$.)

(ii) Ist G' eine weitere Gruppe und $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus mit $U := \mathrm{Kern} f$, so ist die durch $f(g) \mapsto gU$ für alle $g \in G$ definierte Abbildung $\Phi : \mathrm{Bild} f \to G/U$ wohldefiniert und ein Gruppenisomorphismus; insbesondere sind also $\mathrm{Bild} f$ und $G/\mathrm{Kern} f$ isomorph.

W. Henke
M. Welter

WS 02/03

11. Übung zur Linearen Algebra I

(Abgabetermin: Mittwoch, den 22.1.2003, in den Übungsgruppen)

Aufgabe 56:
Eine Matrix $(a_{ij}) = A \in M_n(K)$ heißt obere (bzw. untere) Dreiecksmatrix, falls $a_{ij} = 0$ für alle Paare i, j mit $1 \leq j < i \leq n$ (bzw. $1 \leq i < j \leq n$) gilt. Sei

$$OD_n(K) := \{A \in M_n(K) \mid A \text{ ist obere Dreiecksmatrix}\}.$$

Analog bezeichne $UD_n(K)$ die Menge der unteren Dreiecksmatrizen. Zeigen Sie:

m (i) a) $OD_n(K)$ ist ein Untervektorraum von $M_n(K)$ der Dimension $\frac{n^2+n}{2}$.
b) $(GL(n,K) \cap OD_n(K), \cdot)$ ist eine Untergruppe von $GL(n,K)$.
c) $(OD_n(K), +, \cdot)$ ist ein Unterring von $M_n(K)$.
d) Die Aussagen a)-c) bleiben gültig, wenn man $OD_n(K)$ durch $UD_n(K)$ ersetzt.

s (ii) Ist $A \in OD_n(K) \cup UD_n(K)$, so ist $\det A = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

s (iii) Sind $B \in M_s(K), C \in M_t(K)$ und $D \in M(s \times t, K)$, so gilt

$$\det \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(B) \cdot \det(C).$$

s Aufgabe 57:
Gegeben sei eine Folge von endlich-dimensionalen K-Vektorräumen und K-linearen Abbildungen

$$\{0\} \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{k-2}} V_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \xrightarrow{f_k} \{0\}$$

mit der Eigenschaft, daß $\text{Kern} f_{i+1} = \text{Bild} f_i$ für alle $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ gilt. (Eine solche Folge heißt *exakte Sequenz*). Beweisen Sie, daß dann

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^i \dim_K(V_i) = 0$$

gilt, und folgern Sie daraus nochmals die Dimensionsformeln der Vorlesung für Vektorräume U_1, U_2, V, W mit $V = U_1 \oplus U_2$ und $f \in \text{Hom}_K(V, W)$:

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim U_1 + \dim U_2, \\ \dim V &= \dim \text{Kern} f + \dim \text{Bild} f. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn die Sequenz

$$\{0\} \xrightarrow{f_0} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{f_2} \{0\}$$

exakt ist.

s Aufgabe 58:

(i) Zeigen Sie, daß sich die beiden durch $x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 25$ bzw. $7x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0$ gegebenen Ebenen im $\mathbb{R}^3$ (welche davon sind Vektorräume?) schneiden, und bestimmen Sie ihre Schnittgerade.

(ii) Berechnen Sie für die beiden Geraden

$$\begin{aligned} g_1 &:= (5,1,4) + \mathbb{R}(1,-1,0), \\ g_2 &:= (-5,7,8) + \mathbb{R}(-2,1,1) \end{aligned}$$

des $\mathbb{R}^3$ den Schnittpunkt und die Ebene, die beide Geraden enthält. Geben Sie die Ebene sowohl in Parameterform als auch durch eine definierende Gleichung $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \beta$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \in \mathbb{R}$ an.

s Aufgabe 59:

(i) Seien $A, B \in M(m \times n, K)$ und $C \in M(n \times r, K)$ (K bel. Körper, $m, n, r \in \mathbb{N}_+$). Beweisen Sie

$$\begin{aligned} \text{Rang}(A+B) &\leq \text{Rang}A + \text{Rang}B \\ \text{Rang}(AC) &\leq \min\{\text{Rang}A, \text{Rang}C\}. \end{aligned}$$

(ii) Wir definieren eine Abbildung

$$\text{Spur} : M_n(K) \to K$$

durch $\text{Spur}A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, falls $A = (a_{ij})$. Zeigen Sie, daß für $A, B \in M_n(K)$ stets gilt:

$$\begin{aligned} \text{Spur}(A+B) &= \text{Spur}A + \text{Spur}B, \\ \text{Spur}(AB) &= \text{Spur}(BA). \end{aligned}$$

Gilt auch $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}A \cdot \text{Spur}B$?

Aufgabe 60:

m (i) Schreiben Sie die folgenden Permutationen jeweils als Produkt von Transpositionen benachbarter Elemente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

s (ii) Sei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \in S_n$ ($n \geq 2$). Ferner seien $\gamma \in S_n$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\{\gamma^i(k) \mid i \in \mathbb{N}\} = \{1, \ldots, n\}$.
Zeige: Dann existiert genau ein $\tau \in S_n$ mit

$$\tau(1) = k \text{ und } \gamma = \tau\sigma\tau^{-1}.$$

W. Henke
M. Welter

WS 02/03

12. Übung zur Linearen Algebra I

(Abgabetermin: Mittwoch, den 29.1.2003, in den Übungsgruppen)

s Aufgabe 61:
Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit der Cramerschen Regel

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 19 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 &= 32 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -6 \\ x_3 + 4x_4 &= -1 \end{aligned}$$

s Aufgabe 62:

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{R})$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \quad \text{mit} \quad a_{ij} := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i \leq j \\ n+1-j & , \text{ falls } i > j \end{cases}$$

$$B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \quad \text{mit} \quad b_{ij} := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i+j = n+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

m Aufgabe 63: (Vandermonde-Determinanten)
Zeigen Sie, dass für beliebige $a_1, \ldots, a_n \in K$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (a_j - a_i).$$

Insbesondere sind die Vektoren $v_i := (1, a_i, \ldots, a_i^{n-1}) \in K^n$, $i = 1, \ldots, n$, genau dann linear unabhängig, wenn $a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschieden sind.

s Aufgabe 64:
Für $n \in \mathbb{N}_+$ definieren wir

$$M_n(\mathbb{Z}) := \left\{ A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}\, a_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Zeige für $A \in M_n(\mathbb{Z})$: $\det(A) \in \{1, -1\} \Leftrightarrow \exists_{B \in M_n(\mathbb{Z})}\, AB = E_n$

Aufgabe 65:
Es sei V ein K-Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Dann sind $(V,+)$ und $(U,+)$ insbesondere abelsche Gruppen, und die in Aufgabe 55 eingeführte Faktorgruppe $(V/U,\oplus)$ mit

$$\forall_{v_1,v_2\in V}\ \ (v_1+U)\oplus(v_2+U) := (v_1+v_2)+U$$

ist definiert.
Ist $v\in V$ und $\lambda\in K$, so definieren wir eine Skalarmultiplikation $\odot$ auf V/U durch:

$$\lambda\odot(v+U) \ := \ \lambda v+U.$$

m (i) Man überlege sich zuerst, daß die oben definierte Skalarmultiplikation unabhängig von der Wahl des Repräsentanten der Nebenklassen ist. Dann zeige man, daß $(V/U,\oplus,\odot)$ ein K-Vektorraum ist. Man nennt V/U den *Faktorraum (des Vektorraums V nach seinem Untervektorraum U).*

s (ii) Es sei U der durch die Vektoren $(1,3,4,2)$ und $(3,2,7,7)$ aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^4/U$.

s (iii) Man zeige: Ist V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, so gilt:

$$\dim_K V = \dim_K U + \dim_K(V/U).$$

(Bemerkung: In Zukunft schreiben wir $+$ und $\cdot$ anstelle von $\oplus$ und $\odot$.)

W. Henke
M. Welter

WS 02/03

13. Übung zur Linearen Algebra I

(Abgabetermin: Die Aufgaben sind für Mittwoch, den 5.2.2003, **mündlich** vorzubereiten.)

Aufgabe 66:
Sei $\mathcal{E} := \mathcal{E}_3$ die kanonische geordnete Basis des $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} := ((1,2,3),(1,2,0),(1,0,0))$ und

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + x_3, -x_1 + x_2). \end{aligned}$$

(i) Berechnen Sie den Kern und das Bild von f. Geben Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3/\mathrm{Kern} f$ an.
(ii) Bestimmen Sie $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f), M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(f), M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(f)$ und $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$.

Aufgabe 67:
Es sei $\mathcal{B} := (\sin x, \cos x, \sin x \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x)$ und $V := \mathrm{Spann}_{\mathbf{R}}\mathcal{B} \subset C^\infty(\mathbb{R})$, wobei $C^\infty(\mathbb{R})$ den Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnet. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} D : V &\to V \\ f &\mapsto f', \end{aligned}$$

wobei f' die erste Ableitung von f bezeichnet.

(i) Zeige: D ist ein wohldefinierter Endomorphismus und $\mathcal{B}$ ist eine Basis von V.
(ii) Bestimmen Sie die Matrix $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(D)$.
(iii) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von D (durch Angabe von jeweils einer Basis).

Aufgabe 68:
Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$. $f^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ sei die zu f duale Abbildung. Zeigen Sie:

(i) f Monomorphismus (d.h. injektiv) $\Rightarrow \exists_{g \in \mathrm{Hom}(W,V)}\ g \circ f = id_V$
f Epimorphismus (d.h. surjektiv) $\Rightarrow \exists_{g \in \mathrm{Hom}(W,V)}\ f \circ g = id_W$
(ii) f Monomorphismus $\Rightarrow f^*$ Epimorphismus
f Epimorphismus $\Rightarrow f^*$ Monomorphismus

Aufgabe 69:
Es seien U, V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $g : U \to V$, $f : V \to W$ zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie: Ist

$$U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$$

eine exakte Sequenz, d.h. gilt $\text{Bild}(g) = \text{Kern}(f)$, so ist auch die Sequenz der dualen Abbildungen

$$W^* \xrightarrow{f^*} V^* \xrightarrow{g^*} U^*$$

exakt.
(Tip: Es ist also $\text{Bild}(f^*) = \text{Kern}(g^*)$ zu zeigen. Für den Beweis von $\supset$ starte man zweckmäßigerweise mit einer Basis von $\text{Kern}(f)$, die man zu einer Basis von V erweitere. Dann gehe man zu einer geeigneten Basis von W über und finde zu vorgegebenem $\varphi \in \text{Kern}(g^*)$ ein $\psi \in W^*$ mit $\varphi = \psi \circ f$.)

*****

Hinweise:

- Wenn Sie sich nicht in der Übungsstunde am 29.01.03 zur Klausur angemeldet haben, so können Sie dies noch nachholen, indem Sie sich in die am Raum 019 im Mathematischen Institut aushängende Liste eintragen.
- Zur Klausur ist ein Personalausweis, Schreibzeug und eventuell Verpflegung und Getränke mitzubringen. Papier wird bereit gestellt. Weitere Hilfsmittel, wie z.B. Taschenrechner, sind nicht gestattet.
- An der Nachklausur am 25.3.2003 darf nur teilnehmen, wer an der Klausur am 8.2. teilgenommen hat oder **nachweislich** an diesem Termin verhindert war.

W. Henke
M. Schölpen

Sommersemester 2003

1. Übung zur Linearen Algebra II

(Abgabetermin: Mittwoch, den 30.04.2003, in den Übungsgruppen)

Aufgabe 70:

(i) **(m)** Seien $A, B \in M_n(K) \setminus \{0\}$ mit $AB = 0 \in M_n(K)$. Zeigen Sie, dass hieraus $\det A = \det B = 0 \in K$ folgt.

(ii) **(s)** Berechnen Sie für $\lambda \in K$ die Determinante der folgenden Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{n-2} & \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-1} & 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-3} & \lambda^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \dots & \lambda^{n-1} & 1 \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

Aufgabe 71 (s):
Eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(\mathbb{R})$ heißt *stochastische Matrix*, wenn $\forall_{i,j} a_{ij} \geq 0$ und $\forall_i \sum_j a_{ij} = 1$. Zeigen Sie:

(i) Mit A und B ist auch die Produktmatrix AB eine stochastische Matrix.

(ii) 1 ist Eigenwert jeder stochastischen Matrix.

Aufgabe 72 (s):
Sei $V := C^\infty(\mathbb{R})$ der (unendlich-dimensionale) $\mathbb{R}$-Vektorraum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung $D : V \to V$, $f \mapsto Df := f'$, ist ein Endomorphismus von V.

(ii) Jede reelle Zahl λ ist Eigenwert von D. Die Funktion $f_\lambda \in V$, definiert durch $\forall_{x \in \mathbb{R}} f_\lambda(x) := e^{\lambda x}$, ist ein Eigenvektor von D zum Eigenwert λ, und es gilt $\mathrm{Eig}_\lambda(D) = \mathbb{R} f_\lambda$, insbesondere ist $\mathrm{Eig}_\lambda(D)$ eindimensional.

Aufgabe 73 (s):
Seien $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ (K beliebiger Körper, $n \geq 2$) und sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\beta_1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\beta_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -\beta_n \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

Zeigen Sie: $P_A = (-1)^n(\beta_1 + \beta_2 t + \ldots + \beta_n t^{n-1} + t^n)$.

Aufgabe 74 (m):
Sei K ein Körper.

(i) Zeigen Sie, dass in der Menge $K[t] \times (K[t] \setminus \{0\})$ durch

$$(g, h) \sim (g', h') :\Longleftrightarrow gh' = g'h$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird.
$K(t)$ sei die Menge der Äquivalenzklassen. Die zu (g, h) gehörige Äquivalenzklasse sei mit $\frac{g}{h}$ bezeichnet. Somit ist $\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'} \Leftrightarrow gh' = g'h$.

(ii) Zeigen Sie, dass in $K(t)$ die Verknüpfungen

$$\frac{g}{h} + \frac{g'}{h'} := \frac{gh' + hg'}{hh'}, \quad \frac{g}{h} \cdot \frac{g'}{h'} := \frac{gg'}{hh'}$$

wohldefiniert sind.

(iii) Zeigen Sie schließlich, dass $K(t)$ mit diesen Verknüpfungen zu einem Körper wird. Indem man $g \in K[t]$ mit $\frac{g}{1} \in K(t)$ identifiziert, wird $K(t)$ zu einem Oberkörper von $K[t]$. $K(t)$ heißt der *Körper der rationalen Funktionen (in einer Variablen)*.

Hinweise:

- »(m)« bedeutet, dass die Aufgabe mündlich für die Übungen vorzubereiten ist; »(s)« bedeutet, dass die Aufgabe schriftlich zu bearbeiten ist.
- Die Übungsblätter sind auch im Internet unter der Adresse
  http://www.mi.uni-koeln.de/Forschung/Henke/Lineare_Algebra_II/
  zu finden.
- Die **Klausur** zur Linearen Algebra II findet statt am Samstag, den 02.08.2003, von 14:30 bis 17:30 Uhr in der Aula.

W. Henke
M. Schölpen

Sommersemester 2003

2. Übung zur Linearen Algebra II

(Abgabetermin: Mittwoch, den 07.05.2003, in den Übungsgruppen)

Aufgabe 75 (s):
Seien K ein beliebiger Körper und $\lambda \in K$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Matrizen $A, B \in M_n(K)$ ähnlich sind:

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = A^t$$

(d.h. $a_{ij} = \lambda\delta_{ij} + \delta_{i-1,j}$ und $b_{ij} = \lambda\delta_{ij} + \delta_{i,j-1}$ für $i, j = 1, \ldots, n$). Geben Sie explizit eine Matrix $C \in M_n(K)$ an mit $B = CAC^{-1}$.

Aufgabe 76 (m):

(i) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie: $\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann Eigenwert von A^2, wenn es einen Eigenwert $\mu \in \mathbb{C}$ von A mit $\mu^2 = \lambda$ gibt.

(ii) Geben Sie eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ an mit der folgenden Eigenschaft: A^2 besitzt einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, der nicht Quadrat eines Eigenwertes $\mu \in \mathbb{R}$ von A ist.

Aufgabe 77 (s): Diagonalisieren Sie die folgenden Matrizen:

(i)

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R});$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), \text{ wobei } \alpha \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\} \subset \mathbb{R}.$$

Aufgabe 78 (s):
Seien $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

- **(i)** Ist $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A und von B, so ist v auch ein Eigenvektor von $A + B$.
- **(ii)** Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $\mu \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von B, so ist $\lambda + \mu$ ein Eigenwert von $A + B$.
- **(iii)** Ist A invertierbar und ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A, so gilt $\lambda \neq 0$ und $\overset{-1}{\lambda}$ ist Eigenwert von $\overset{-1}{A}$.
- **(iv)** Ist A diagonalisierbar und existiert ein $k \in \mathbb{N}_+$ mit $A^k = 0$, so folgt $A = 0$.

Aufgabe 79 (s):
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$ zwei diagonalisierbare Endomorphismen mit $f \circ g = g \circ f$.
Zeigen Sie: Dann sind f und g *simultan diagonalisierbar*, d.h. es existiert eine geordnete Basis $\mathcal{A}$ von V derart, dass sowohl $M_{\mathcal{A}}(f)$ als auch $M_{\mathcal{A}}(g)$ Diagonalmatrizen sind.

W. Henke
M. Schölpen

Sommersemester 2003

3. Übung zur Linearen Algebra II

(Abgabetermin: Mittwoch, den 14.05.2003, in den Übungsgruppen.
Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.)

Aufgabe 80:
Sei $V := K^{\mathbb{N}}$ der unendlich-dimensionale K-Vektorraum aller Folgen in K. Zeigen Sie, dass durch

$$f((a_0, a_1, a_2, \ldots)) := (a_1, a_2, a_3, \ldots) \text{ und } g((a_0, a_1, a_2, \ldots)) := (0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

Endomorphismen $f, g \in \mathrm{End}(V)$ definiert werden und bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von f und von g.

Aufgabe 81:
Seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. $\mathcal{A}$ sei eine geordnete Basis von V und $A := M_{\mathcal{A}}(f)$ sei die Matrix von f bzgl. $\mathcal{A}$.
Zeigen Sie: Die Menge $\{M_{\mathcal{B}}(f) \mid \mathcal{B}$ geordnete Basis von $V\}$ aller Matrizen von f bzgl. geordneter Basen von V ist gleich der Menge aller zu A ähnlichen Matrizen.

Aufgabe 82:
Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M_n(K)$ eine obere Dreiecksmatrix, also $a_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i > j$. Zeigen Sie, dass dann die beiden folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind:

- **(i)** $a_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \geq j$ (d.h. A ist eine *strikte obere Dreiecksmatrix*).
- **(ii)** $\exists_{k \in \mathbb{N}} A^k = 0$, d.h. per def.: A ist *nilpotent*.

Aufgabe 83:
Sei V ein K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit der Eigenschaft, dass jedes $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von f ist. Zeigen Sie, dass dann ein $\lambda \in K$ existiert mit $f = \lambda \, \mathrm{id}_V$.

Aufgabe 84:
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass f diagonalisierbar ist, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- **(i)** $f^2 = f$, (d.h. per def.: f ist *idempotent*);
- **(ii)** $f^2 = \mathrm{id}_V$ und $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Ist die zusätzliche Voraussetzung $\mathrm{char}(K) \neq 2$ in (ii) notwendig?

W. Henke
M. Schölpen

Sommersemester 2003

4. Übung zur Linearen Algebra II

(Abgabetermin: Mittwoch, den 21.05.2003, in den Übungsgruppen.
Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.)

Aufgabe 85:
Seien $A, B \in M_n(K)$ $(n \geq 2)$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Jeder Eigenwert von AB ist auch Eigenwert von BA.
(ii) Jeder Eigenvektor von AB ist auch Eigenvektor von BA.

Aufgabe 86:
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit

$$P_f = (-1)^n(t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n),$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Zeigen Sie, dass dann für alle $h \in K[t]$ gilt:

$$P_{h(f)} = (-1)^n(t - h(\lambda_1)) \cdot \ldots \cdot (t - h(\lambda_n)).$$

Aufgabe 87:
Seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$ und sei f trigonalisierbar. Zeigen Sie:
f und g haben genau dann keinen gemeinsamen Eigenwert, wenn $P_f(g) \in \mathrm{End}(V)$ invertierbar ist.

Aufgabe 88:
Seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $\mathcal{A}$ eine geordnete Basis von V, $f \in \mathrm{End}(V)$ und $A := M_{\mathcal{A}}(f) \in M_n(K)$. Zeigen sie:
f ist genau dann nilpotent, wenn A nilpotent ist.
Sind f und A nilpotent, so haben f und A denselben Nilpotenzindex.

Aufgabe 89:
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent vom Index n $(n \geq 2)$. Ferner sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Zeigen Sie, dass kein $g \in \mathrm{End}(V)$ existiert mit $g^k = f$.

W. Henke
M. Schölpen

Sommersemester 2003

5. Übung zur Linearen Algebra II

(Abgabetermin: Mittwoch, den 28.05.2003, in den Übungsgruppen.
Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.)

Aufgabe 90:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, d.h. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$ (vgl. 7.40). Zeigen Sie:

(i) $\forall_{n\in\mathbb{N}_+} \quad \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$

(ii) $\forall_{n\in\mathbb{N}_+} \quad a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$

(iii) $\forall_{m,n\in\mathbb{N}_+} \quad a_{m+n} = a_{m-1}a_n + a_m a_{n+1}$

(iv) $\forall_{m,n\in\mathbb{N}_+} \quad (n \text{ teilt } m \Rightarrow a_n \text{ teilt } a_m)$

(v) $\forall_{m\in\mathbb{N}_+, m\neq 4} \quad (a_m \text{ Primzahl} \Rightarrow m \text{ Primzahl})$

Gilt in (v) auch „$\Leftarrow$“?

Aufgabe 91:
Seien $h, g_1, g_2 \in K[t]$ normierte Polynome mit $h = g_1 g_2$ und sei

$$h = \prod_{i=1}^{n}(t - \lambda_i) = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n)$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$.
Zeigen Sie, dass dann eine disjunkte Zerlegung $\{1, \ldots, n\} = I_1 \dot\cup I_2$ existiert mit

$$g_1 = \prod_{i\in I_1}(t - \lambda_i) \text{ und } g_2 = \prod_{i\in I_2}(t - \lambda_i).$$

(Dabei sei $\prod_{i\in I_j}(t - \lambda_i) := 1$, falls $I_j = \emptyset$.)

Aufgabe 92:
Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit

$$P_A = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n.$$

Zeigen Sie:

$$P_{A^{-1}} = \frac{(-1)^n}{a_0}(a_n + a_{n-1}t + \ldots + a_0 t^n)$$

Aufgabe 93:
Seien K ein Körper, $\lambda \in K$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Dann heißt die Matrix

$$J(\lambda, k) := \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_k(K)$$

Jordan-Block der Länge k zu λ. Zeigen sie, dass für alle $m \in \mathbb{N}_+$ gilt:

$$J(\lambda, k)^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \lambda^m & \ddots & & & \vdots \\ \binom{m}{2}\lambda^{m-2} & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \lambda^m & 0 \\ \binom{m}{k-1}\lambda^{m-k+1} & \binom{m}{k-2}\lambda^{m-k+2} & \cdots & \cdots & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \lambda^m \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_k(K).$$

(Dabei gilt für $i > m$ per def. $\binom{m}{i} := \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i} = 0$ und $\binom{m}{i}\lambda^{m-i} := 0$, ferner $\lambda^0 := 1$.)

Aufgabe 94:
Für $m \in \mathbb{N}_+$ ist

$$V := K_m[t] := \{h \in K[t] \mid h = 0 \text{ oder } \partial(h) \leq m\}$$

ein $(m+1)$-dimensionaler Untervektorraum von $K[t]$. Zeigen Sie, dass durch

$$\forall_{h=\sum_{j=0}^{m} a_j t^j \in K_m[t]} \; Dh := h' := \sum_{j=1}^{m} j a_j t^{j-1} = \sum_{j=0}^{m-1} (j+1) a_{j+1} t^j$$

ein Endomorphismus $D \in \mathrm{End}(V)$ definiert wird, der nilpotent vom Index $m+1$ ist, und bestimmen Sie eine geordnete Basis $\mathcal{A}$ von V mit $M_{\mathcal{A}}(D) = N(m+1)$.

W. Henke
M. Schölpen

Sommersemester 2003

6. Übung zur Linearen Algebra II

(Abgabetermin: Mittwoch, den 04.06.2003, in den Übungsgruppen.)

Aufgabe 95:
Seien $n, k \in \mathbb{N}_+$. Zeigen Sie, dass alle Matrizen $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $A^k = E_n$ diagonalisierbar sind und klassifizieren Sie alle derartigen Matrizen bis auf Ähnlichkeit.

Aufgabe 96:
Sei $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^5)$ der nilpotente Endomorphismus des $\mathbb{R}^5$, der bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^5$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt. Bestimmen Sie eine direkte Summenzerlegung von $\mathbb{R}^5$ in bzgl. f zyklische Untervektorräume.

Aufgabe 97:
Sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass A und A^t zueinander ähnlich sind.

Aufgabe 98:
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie $T \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ so, dass die Matrix $T^{-1}AT$ Jordansche Normalform besitzt.
Wie lautet das Minimalpolynom von A?

Aufgabe 99:
Aus der Analysis wird als bekannt vorausgesetzt, dass $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ ein n^2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Banachraum mit der Norm $\| \ \|_\infty$ ist, wobei $\|A\|_\infty := \max\limits_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} |a_{ij}|$ für $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Zeigen Sie:

(i) Durch

$$\forall_{A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})} \ \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \qquad (*)$$

wird eine Abbildung

$$\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

definiert, die sogenannte *Exponentialabbildung für Matrizen*, (d.h. die rechte Seite von $(*)$ ist konvergent in $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$).

(ii) Für alle $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit $AB = BA$ gilt

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B).$$

Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels im Fall $n = 2$, dass auf die Voraussetzung $AB = BA$ nicht verzichtet werden kann.

(iii) Für alle $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ und $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ gilt

$$\exp(CA\overset{-1}{C}) = C\exp(A)\overset{-1}{C}.$$

(iv) Berechnen Sie $\exp(D)$ und $\exp(N)$ für

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad N = N(n) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

(v) Berechnen Sie $\exp(A)$ für

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

durch Transformation von A auf Jordansche Normalform und Anwendung von (iii) und (iv) bzw. Aufgabe 93.

W. Henke
M. Schölpen

Sommersemester 2003

7. Übung zur Linearen Algebra II

(Abgabetermin: Mittwoch, den 18.06.2003, in den Übungsgruppen.)

Aufgabe 100:
(Lineare homogene Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten)

Seien $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten die „Anfangswertaufgabe“

$$y'(x) = A\,y(x), \qquad y(x_0) = y_0, \tag{$*$}$$

d.h. ausführlicher:

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{01} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix}$$

oder

$$\forall_{i\in\{1,\ldots,n\}}\ y_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,y_j(x), \qquad y_i(x_0) = y_{0i}.$$

Zeigen Sie:

(i) $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ y(x) := \exp((x - x_0)A)\,y_0,$$

ist Lösung von $(*)$.

(ii) Ist $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $x_0 \in J$ und ist $\widetilde{y} : J \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $(*)$, so gilt $\widetilde{y} = y|J$, wobei y wie in (i).

[Hinweise: Zu (i): Nutzen Sie Übungsaufgabe 99(ii). Zu (ii): Zeigen Sie, dass $z(x) := \exp(-(x - x_0)A)\,\widetilde{y}(x) : J \to \mathbb{R}^n$ verschwindende Ableitung besitzt.]

Aufgabe 101:

Berechnen Sie $\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 102:
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^4$ derart, dass $M_{\mathcal{A}}(\Phi_A)$ Jordansche Normalform besitzt.

Aufgabe 103:
Wir wissen von einem Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^6)$, dass $P_f = (t-2)^4(t+3)^2$, $\dim \mathrm{Eig}_2(f) = 2$ und $\partial(m_f) = 4$. Wie sehen die möglichen Jordanschen Normalformen von f aus? Bitte begründen Sie Ihr Ergebnis ausführlich.

Aufgabe 104:
Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Sei $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ definiert durch $\forall_{v \in V}\ \|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Zeigen Sie:

(i) Für alle $u \in V$ gilt

$$u = 0 \ \Leftrightarrow\ \forall_{v \in V}\ \langle u, v\rangle = 0.$$

(ii)
$$\forall_{u,v \in V} \quad \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \ =\ 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

Erklären Sie, warum diese Aussage als „Parallelogrammgleichung“ bezeichnet wird.

W. Henke
M. Schölpen

Sommersemester 2003

8. Übung zur Linearen Algebra II

(Abgabetermin: Mittwoch, den 25.06.2003, in den Übungsgruppen.)

Aufgabe 105:
Sei V ein (nicht notwendig endlich-dimensionaler) K-Vektorraum. $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt per def. *unipotent*, wenn $f - \mathrm{id}_V \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent ist.

(i) Kann man unipotente und nilpotente Endomorphismen an ihren Eigenwerten erkennen?
(ii) Zeigen Sie, dass jeder unipotente Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ invertierbar ist.
(iii) Sei $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ eine nilpotente Matrix. Zeigen Sie, dass dann $\exp(N) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ unipotent ist, d.h per def., dass $\phi_{\exp(N)} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ unipotent ist.

Aufgabe 106:
(Produktzerlegung eines Automorphismus in einen diagonalisierbaren und unipotenten Anteil)

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{Aut}(V)$ (d.h. per def.: $f \in \mathrm{End}(V)$ und f invertierbar). Das charakteristische Polynom P_f von f zerfalle in Linearfaktoren. Sei $f = g + h$, wobei $g, h \in \mathrm{End}(V)$, g diagonalisierbar, h nilpotent und $gh = hg$. (Derartige g, h existieren nach Satz 7.51). Zeigen Sie:

(i) $g \in \mathrm{Aut}(V)$, d.h. g ist invertierbar.
(ii) Es existiert $\widetilde{h} \in \mathrm{Aut}(V)$, $\widetilde{h}$ unipotent, mit

$$f = g\widetilde{h} = \widetilde{h}g.$$

Aufgabe 107:
Orthonormalisieren Sie die folgenden vier Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 des $\mathbb{R}^5$ nach Gram–Schmidt:

$$v_1 := (1,0,0,0,0),\ v_2 := (1,0,1,0,0),\ v_3 := (1,1,1,0,2),\ v_4 := (2,1,0,2,3).$$

Aufgabe 108:
Beweisen Sie, dass die Aussage

„Es existiert $f \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^2) \setminus \{0\}$ mit $\forall_{v \in \mathbb{K}^2}\ \langle v, f(v)\rangle = 0$“

im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ falsch und im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wahr ist.
Bestimmen Sie im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ darüber hinaus alle $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ mit dieser Eigenschaft.

Aufgabe 109:
Seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V. Ferner sei $G = (g_{jk})_{j,k=1,\ldots,n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ eine positiv definite (insb. symmetrische bzw. hermitesche) Matrix. Zeigen Sie, dass dann durch

$$\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k v_k \rangle := \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk} \alpha_j \overline{\beta_k}$$

ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ von V definiert wird mit $\forall_{j,k \in \{1,\ldots,n\}}\ \langle v_j, v_k\rangle = g_{jk}$.

Termin der 2. Klausur zur Linearen Algebra II:
Mittwoch, den 24. September 2003, vormittags

W. Henke
M. Schölpen

Sommersemester 2003

9. Übung zur Linearen Algebra II

(Abgabetermin: Mittwoch, den 02.07.2003, in den Übungsgruppen.)

Aufgabe 110:

(i) Beweisen Sie, dass durch

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle_* := x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$$

ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle_*$ auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

(ii) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bzgl. dieses Skalarproduktes $\langle\ ,\ \rangle_*$.

Aufgabe 111:

Sei $V := \mathbb{R}^3$ und sei $W := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $W^\perp$.

Aufgabe 112:

Sei V der (unendlich dimensionale) $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ (vgl. 8.2, 2)).
Zeigen Sie, dass die Abbildung $\iota : V \to V^*$, $g \mapsto \langle \ldots, g \rangle$ injektiv, aber nicht surjektiv ist.
(*Tipp:* $\varphi \in V^*$, definiert durch $\forall_{f \in V}\ \varphi(f) := f(0)$, ist nicht Element von $\iota(V)$.)

Aufgabe 113:
Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ und sei $M := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ Eigenwert von } f\}$. Zeigen Sie:

(i) Folgende drei Aussagen sind paarweise äquivalent:

(a) f ist eine Orthogonalprojektion, d.h. es existiert ein Untervektorraum W von V mit $f = P_W$,

(b) $f^* = f$ und $f^2 = f$,

(c) $f^* = f$ und $M \subset \{0, 1\}$.

(ii) Folgende drei Aussagen sind paarweise äquivalent:

(a) f ist eine Orthogonalspiegelung, d.h. es existiert ein Untervektorraum W von V mit $f = S_W$,

(b) $f^* = f$ und $f^2 = \mathrm{id}_V$,

(c) $f^* = f$ und $M \subset \{-1, 1\}$.

Aufgabe 114:
(Ein alternativer „analytischer Beweis" des Satzes, dass jeder selbstadjungierte Endomorphismus eines euklidischen Vektorraumes einen Eigenwert besitzt)

Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Zeigen Sie der Reihe nach:

(i) $S := \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ ist eine kompakte Teilmenge von V und die Funktion $h : S \to \mathbb{R}$, definiert durch $\forall_{v \in S}\ h(v) := \langle f(v), v\rangle$, nimmt an einer Stelle $u \in S$ ihren maximalen Wert an.

(ii) Für jedes $w \in S \cap (\mathbb{R}u)^\perp$ hat die Funktion $\psi_w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $\forall_{t \in \mathbb{R}}\ \psi_w(t) := h(\cos(t)u + \sin(t)w)$, die Eigenschaft $\psi_w'(0) = 2\langle f(u), w\rangle = 0$.

(iii) Es existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $f(u) = \lambda u$, also besitzt f einen Eigenwert.

W. Henke
M. Schölpen

Sommersemester 2003

10. Übung zur Linearen Algebra II

(Abgabetermin: Mittwoch, den 09.07.2003, in den Übungsgruppen.)

Aufgabe 115:
Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Kern}(f^*) = \mathrm{Bild}(f)^\perp$,
(ii) $\mathrm{Bild}(f^*) = \mathrm{Kern}(f)^\perp$,
(iii) $\mathrm{Rang}(f^*) = \mathrm{Rang}(f)$.

Aufgabe 116:
Seien $v_1 := (1,2), v_2 := (0,-1) \in \mathbb{R}^2$, also $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ Basis von $\mathbb{R}^2$, und sei $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ der eindeutig bestimmte Endomorphismus des $\mathbb{R}^2$ mit

$$M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(i) f ist selbstadjungiert (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle$ auf $\mathbb{R}^2$). Berechnen Sie dazu $M_{\mathcal{E}_2}(f)$.
(ii) f ist nicht selbstadjungiert bzgl. des Skalarproduktes $\langle\ ,\ \rangle_0$ auf $\mathbb{R}^2$, das charakterisiert ist durch $\langle v_i, v_j \rangle_0 = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1,2\}$. Berechnen Sie den zu f adjungierten Endomorphismus $f^{*,\langle\ ,\ \rangle_0} \in \mathrm{End}(V)$ bzgl. $\langle\ ,\ \rangle_0$ sowie $M_{\mathcal{E}_2}(f^{*,\langle\ ,\ \rangle_0})$.

Aufgabe 117:
Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

(i) f ist normal $\iff \forall_{v,w \in V}\ \langle f^*(v), f^*(w) \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$.
(ii) f ist nilpotent $\iff$ f^* ist nilpotent.
(iii) Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt:
f ist selbstadjungiert $\iff$ f ist normal und alle Eigenwerte von f sind reell.

Aufgabe 118:
Wegen der Isomorphie des $\mathbb{K}$-Vektorraums $M_n(\mathbb{K})$ zu $\mathbb{K}^{(n^2)}$ wird durch

$$\langle A, B\rangle := \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\overline{b_{jk}}$$

für alle $A = (a_{jk})_{j,k=1,\ldots,n}, B = (b_{jk})_{j,k=1,\ldots,n}$ offenbar ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf $M_n(\mathbb{K})$ definiert. Zeigen Sie:

(i) $\forall_{A,B\in M_n(\mathbb{K})}\ \langle A, B\rangle = \mathrm{Spur}(AB^*)$.
(ii) $\forall_{A,B\in M_n(\mathbb{K})}\ \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.
(iii) Für jedes $C \in M_n(\mathbb{K})$ gilt für die *Linksmultiplikation*
$L_C : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, definiert durch $\forall_{A\in M_n(\mathbb{K})}\ L_C(A) := CA$:

$$L_C \in \mathrm{End}(M_n(\mathbb{K})) \text{ und } (L_C = L_C{}^* \ \Leftrightarrow\ C = C^*).$$

Aufgabe 119:
Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

$$V_n(\mathrm{Par}(f(v_1), \ldots, f(v_n))) = |\det(f)|\ V_n(\mathrm{Par}(v_1, \ldots, v_n)).$$

Die Fachschaft lässt mitteilen:

Am Freitag, den 4. Juli 2003, startet um 19:00 Uhr unser SOMMER(GRILL-)FEST auf dem Parkplatz des MI. Ihr seid alle herzlich eingeladen!!!

W. Henke
M. Schölpen

Sommersemester 2003

11. Übung zur Linearen Algebra II

(Abgabetermin: Mittwoch, den 16.07.2003, in den Übungsgruppen.)

Aufgabe 120:
Seien $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und sei $\alpha := \measuredangle(v, w)$. Zeigen Sie:

(i) $\det(v, w) > 0 \implies \frac{w}{|w|} = e^{i\alpha}\frac{v}{|v|}$,
(ii) $\det(v, w) < 0 \implies \frac{w}{|w|} = e^{-i\alpha}\frac{v}{|v|}$.

Aufgabe 121: (Ein analytischer Beweis des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck)

Seien a, b, c drei Punkte des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^2$, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann heißt $\Delta := (a, b, c)$ ein (nicht-entartetes) Dreieck mit den Eckpunkten a, b, c. Sei α bzw. β bzw. γ der Winkel des Dreiecks Δ im Eckpunkt a bzw. b bzw. c, d.h. per def.:

$$\alpha := \measuredangle(b-a, c-a), \quad \beta := \measuredangle(c-b, a-b), \quad \gamma := \measuredangle(a-c, b-c).$$

Beweisen Sie: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

[Tipp: Zeigen Sie zunächst

$$\det(b-a, c-a) = \det(c-b, a-b) = \det(a-c, b-c) \neq 0$$

und wenden Sie Aufgabe 120 an.]

Aufgabe 122:
Beweisen Sie Satz 8.41 der Vorlesung (über das orientierte n-dimensionale Volumen von n-Parallelotopen in einem n-dimensionalen euklidischen orientierten Vektorraum).

Aufgabe 123:
Sei $\Delta = (a, b, c)$ ein nicht-entartetes Dreieck im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: Die drei Mittelsenkrechten von Δ schneiden sich in genau einem Punkt $m \in \mathbb{R}^2$. Es gilt $|m-a| = |m-b| = |m-c| =: r \in \mathbb{R}_+$. a, b und c liegen also auf dem Kreis um m vom Radius r, dem sogenannten „Umkreis von Δ“.

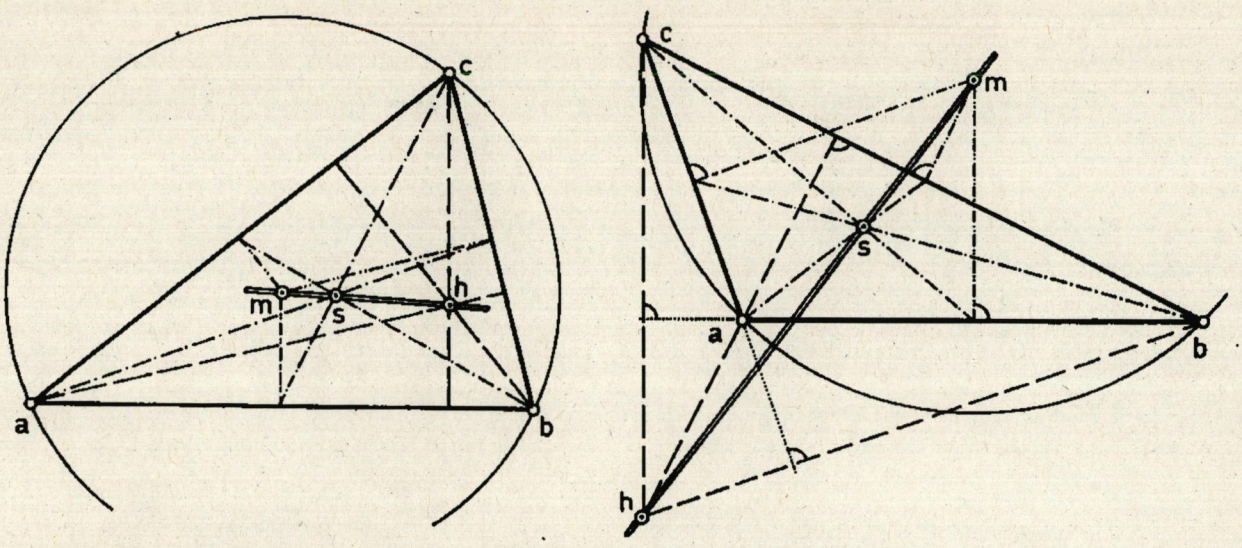


ABBILDUNG 1. Die EULER-Gerade in einem spitz- bzw. einem stumpfwinkligen Dreieck

Aufgabe 124: (Über die „Eulersche Gerade" eines Dreiecks, nach Euler (1763))

Sei $\Delta = (a, b, c)$ ein (nicht-entartetes) Dreieck im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Wir setzen voraus, dass der Umkreis von Δ (vgl. Aufgabe 123) den Nullpunkt 0 des $\mathbb{R}^2$ als Mittelpunkt hat und den Radius $r \in \mathbb{R}_+$ besitzt, (also $|a| = |b| = |c| = r$). Zeigen Sie:

(i) $m = 0$ ist der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten, $s := \frac{1}{3}(a + b + c)$ ist der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden, $h := a + b + c$ ist der Schnittpunkt der drei Höhen von Δ.

(ii) Δ ist genau dann gleichseitig (d.h. per def.: $|a-b| = |b-c| = |c-a|$), wenn $a + b + c = 0$ gilt.

(iii) Entweder ist Δ gleichseitig (in diesem Fall gilt $m = s = h$), oder die drei Punkte m, s, h sind voneinander verschieden und liegen auf einer Geraden, der sog. „Eulerschen Geraden" von Δ. Auf dieser Geraden liegt s zwischen m und h, und der Abstand von s zu h ist doppelt so groß wie der Abstand von s zu m (vergleiche Abbildung 1). Natürlich gelten die Aussagen von (iii) dann auch für beliebige nicht-entartete Dreiecke in $\mathbb{R}^2$ (ohne die Vorraussetzung $m = 0$).

(iv) Berechnen Sie für das Dreieck Δ' in $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $a' := (0, 0), b' := (\sqrt{3}, 0), c' := (0, 1)$ die Eulersche Gerade sowie die Schnittpunkte m' bzw. s' bzw. h' der drei Mittelsenkrechten bzw. Seitenhalbierenden bzw. Höhen von Δ'.

Man kann zeigen, dass sich auch die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks in $\mathbb{R}^2$ in einem Punkt treffen. Berechnen Sie auch den Schnittpunkt w' der Winkelhalbierenden von Δ' und stellen Sie fest, dass w' nicht auf der Eulerschen Geraden von Δ' liegt. (Skizze!)

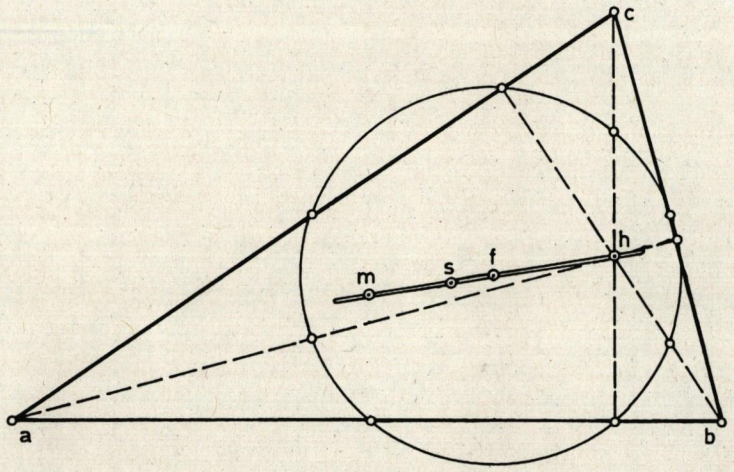
W. Henke
M. Schölpen

Sommersemester 2003

12. Übung zur Linearen Algebra II

(Abgabetermin: Mittwoch, den 23.07.2003, in den Übungsgruppen.)

Aufgabe 125: (Der „Feuerbach-Kreis" eines Dreiecks, nach Feuerbach (1822))



Sei $\Delta = (a, b, c)$ ein nicht-entartetes Dreieck im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2$, dessen Umkreis den Radius $r \in \mathbb{R}_+$ besitzt.

(i) Der „Feuerbach-Kreis" von Δ ist definiert als der eindeutig bestimmte Kreis F in $\mathbb{R}^2$ durch die Mittelpunkte $\frac{1}{2}(b+c)$, $\frac{1}{2}(c+a)$, $\frac{1}{2}(a+b)$ der drei Seiten von Δ. Zeigen Sie:

(1) Der Mittelpunkt f des Kreises F ist gleich $\frac{1}{2}(m+h)$. f liegt also auf der Eulerschen Geraden genau in der Mitte zwischen m und h, ferner gilt $3s = m + 2f$.

(2) Der Radius des Kreises F ist gleich $\frac{r}{2}$, also gleich dem halben Umkreisradius.

(3) Auf F liegen auch die Fußpunkte der drei Höhen.

(4) Auf F liegen auch die Mittelpunkte $\frac{1}{2}(a+h)$, $\frac{1}{2}(b+h)$, $\frac{1}{2}(c+h)$ der drei Höhenabschnitte zwischen den Eckpunkten und dem Höhenschnittpunkt h.

[*Tipp:* Offenbar genügt es, den Beweis für den Fall zu führen, dass Δ den Nullpunkt des $\mathbb{R}^2$ als Umkreismittelpunkt besitzt. Dann gelten also die Formeln für m, s und h in Aufgabe 124(i), und es ist zu zeigen, dass $f = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Der Fußpunkt der Höhe durch c ist gleich $\frac{a+b}{2} + \langle c - \frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{|b-a|} \rangle \frac{b-a}{|b-a|} \cdot$]

(ii) Sei Δ' das Dreieck wie in Aufgabe 124(iv). Skizzieren Sie noch einmal Δ' zusammen mit dem Umkreis und dem Feuerbach-Kreis. Wie liegen der Umkreis und der Feuerbach-Kreis relativ zueinander?

Aufgabe 126:
Sei V ein 3-dimensionaler euklidischer orientierter Vektorraum und seien $a, b, c \in V$. Zeigen Sie

(i) die *Grassmann-Identität* $\quad a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c$

(ii) die *Jacobi-Identität* $\quad a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$

Aufgabe 127:
(Wie man interessante Abstände im $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe des Vektorprodukts berechnen kann)

Seien im Folgenden a, b, c, d und p Punkte des euklidischen orientierten Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

(i) Gelte $a \neq b$. $G_{a,b} \subset \mathbb{R}^3$ bezeichne die Gerade des $\mathbb{R}^3$ durch a und b. Dann gilt für den Abstand des Punktes p von der Geraden $G_{a,b}$

$$\operatorname{dist}(p, G_{a,b}) := \min\{\|p - x\| \mid x \in G_{a,b}\} = \frac{\|(b-a) \times (p-a)\|}{\|b-a\|}.$$

(ii) Angenommen a, b, c liegen nicht auf einer Geraden. $E_{a,b,c} \subset \mathbb{R}^3$ bezeichne die Ebene des $\mathbb{R}^3$ durch a, b und c. Dann gilt für den Abstand des Punktes p von der Ebene $E_{a,b,c}$

$$\operatorname{dist}(p, E_{a,b,c}) := \min\{\|p - x\| \mid x \in E_{a,b,c}\} = \frac{|\langle (b-a) \times (c-a), p-a\rangle|}{\|(b-a) \times (c-a)\|}.$$

(iii) Angenommen a, b, c, d liegen nicht in einer Ebene. Dann gilt für den Abstand der Geraden $G_{a,b}$ und $G_{c,d}$

$$\operatorname{dist}(G_{a,b}, G_{c,d}) := \min\{\|x-y\| \mid x \in G_{a,b} \text{ und } y \in G_{c,d}\} = \frac{|\langle (b-a) \times (d-c), c-a\rangle|}{\|(b-a) \times (d-c)\|} > 0.$$

Aufgabe 128:
Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Zeigen Sie:

(i) Für je zwei selbstadjungierte Endomorphismen f, g von V mit $\forall_{v \in V}\ \langle f(v), v\rangle = \langle g(v), v\rangle$ gilt $f = g$.

(ii) Ein beliebiger Endomorphismus f von V ist genau dann normal, wenn $\forall_{v \in V}\ \|f(v)\| = \|f^*(v)\|$ gilt.

Aufgabe 129:
Wir betrachten $M_n(\mathbb{K})$ wie in Aufgabe 118 als n^2-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle A, B\rangle = \operatorname{Spur}(AB^*)$. Zeigen Sie:

(i) Alle orthogonalen Matrizen in $M_n(\mathbb{R})$ haben die Norm $\sqrt{n}$.

(ii) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} \cosh(t) & \mathrm{i}\sinh(t) \\ \mathrm{i}\sinh(t) & -\cosh(t) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ orthogonal.

(iii) Die orthogonalen Matrizen in $M_n(\mathbb{C})$ können im Falle $n \geq 2$ beliebig große Normen haben.

W. Henke
M. Schölpen

Sommersemester 2003

13. Übung zur Linearen Algebra II

(Abgabetermin: Mittwoch, den 30.07.2003, in den Übungsgruppen.)

Aufgabe 130:
Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und sei W ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie: Die Orthogonalspiegelung $S_W \in \mathrm{End}(V)$ von V an W ist isometrisch, (d.h. $S_W \in \mathrm{O}(V)$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $S_W \in \mathrm{U}(V)$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Aufgabe 131:

(i) Sei $A := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2)$, wobei $\varphi \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\Phi_A \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ ist die Orthogonalspiegelung S_G von $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $G := \mathbb{R}e^{i\frac{\varphi}{2}}$.

(ii) Sei $B := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2)$, wobei $\varphi \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\Phi_B \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ ist die Komposition zweier Orthogonalspiegelungen an Geraden des $\mathbb{R}^2$. Geben Sie explizit zwei Geraden G_1, G_2 des $\mathbb{R}^2$ an mit $\Phi_B = S_{G_2} S_{G_1}$.

Aufgabe 132:

(i) Zeigen Sie: Jedes $f \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3) := \{g \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^3) \mid \det g = 1\}$ besitzt 1 als Eigenwert und hat folglich einen von 0 verschiedenen Fixpunkt.
Jedes $f \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^3) \setminus \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3) = \{g \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^3) \mid \det g = -1\}$ besitzt -1 als Eigenwert.

(ii) (Eine Aufgabe zum Start des 1. FC Köln in die Bundesliga)
Wir nehmen an, bei einem Fußballspiel werde nur ein Ball benutzt. Zeigen Sie: Auf der Oberfläche des Balles gibt es mindestens zwei Punkte, die sich zu Beginn der ersten und der zweiten Halbzeit (wenn der Ball genau auf dem Anstoßpunkt liegt) an der gleichen Stelle im ungebenden Raum befinden.

Aufgabe 133:
Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

(i) A^*A ist hermitesch und positiv definit.
(ii) Es existiert eine hermitesche und positiv definite Matrix B mit $B^2 = A^*A$.
(iii) $U := A\overset{-1}{B} \in \mathrm{U}(n)$.
(iv) $A = UB$ mit $U \in \mathrm{U}(n)$ und $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ hermitesch und positiv definit.

Aufgabe 134:

(i) Sei $P \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom mit $\partial P = n \in \mathbb{N}_+$. Zeigen Sie, dass dann endlich viele Polynome $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathbb{R}[t]$ existieren mit

$$P = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_k \text{ und } \forall_{i \in \{1,\ldots,k\}}\ \partial Q_i \in \{1, 2\}.$$

(ii) Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass dann ein f-invarianter Untervektorraum W von V existiert mit $\dim W \in \{1, 2\}$.
[Tipp: Benutze (i) und den Satz von Cayley–Hamilton.]

Termin der Klausur zur Linearen Algebra II
Samstag, den 2. August 2003, 14:30 – 17:30 Uhr, Aula Hauptgebäude

Termin der Wiederholungsklausur zur Linearen Algebra II
Mittwoch, den 24. September 2003, 9:30 – 12:30 Uhr, Aula 1

Index

A Abbildung = Funktion 26
abelsch 48
abstandserhaltend 280, 289
adjungierte Matrix 128
adjungierter Endom. 241, 242, 243
ähnliche Matrizen 164, ü75
Äquivalenz 4
Äquivalenzrelation, -klasse 30
Äquivalenzsatz von Bernstein 36
affiner Unterraum ü54
algebraische Vielfachheit 167
allgemeine lineare Gruppe 96
alternierende Gruppe 112
antisymmetrisch 32
Assoziativitätsgesetz 48, 54
Aussage 1
Aussageform 6, 7
Austauschsatz (Steinitz) 71
Auswahlaxiom 30
Automorphismus 77

B Basis 67, 68, ü39
- kanonische von K^n 76
- geordnete 131
Bedingung; notwendige-hinreichende- 3
Bernstein 36
Beschränkung 29
bijektiv 27
Bild 25
bilinear, Bilinearform 224, 301

C Cantor 11
- Satz von - 40
Cauchy-Schwarzsche Ungleichung
Cayley-Hamilton, Satz von - 187, 189
Charakteristik ü35
charakteristische Funktion 161, 166
charakteristisches Polynom 160, 166
Cosinussatz der Trigonometrie 257
Cramersche Regel 123

D Determinante 113, 139
- Multiplikationssatz 120
diagonalisierbar 170, 171, 172
Differentialgleichungssystem ü100
Differenzmenge 14
Dimension 75
Dimensionssätze 86, 87
direkte Summe ü34, 169
Disjunktion 2
Distributivgesetz 94
Divisionsalgorithmus ü26, ü42
Drehsinn 267
Dreiecksmatrix ü56
Dreiecksungleichung 227
duale Abbildung 136
duale Basis 135
Dualraum 135
Duplizierung einer Menge ü12
Durchschnitt 14
Durchschnittsmenge 18

E Ebene ü54
Eigenraum, Eigenvektor, Eigenwert 142, 161
Eigenschaft 7
Einheitsmatrix 84

Einselement 49
Einsetzungs-Homom. 185
Einsetzungsklasse 67
elementare Umformung 100
endlich 35
endlich-dimensional 75
endlich erzeugt 74
Endomorphismus 77
entgegengesetzt orientierte Basen 265
Entwicklungssatz für die Determinante 129
Epimorphismus 77
Ersetzungs-Axiom 29
Erzeugendensystem 66
euklidischer Vektorraum 233
Eulersche Gerade ü124
exakte Sequenz ü57
Existenz-Axiom 12
Exponentialabbildung für Matrizen ü99
Extensions-Axiom 13

F
Fahne 175
Faktorgruppe ü55
Faktorraum ü65
Fehlstand 111
Feuerbach-Kreis ü125
Fibonacci-Zahlen 201, ü90
Folge 34
- rekursiv definierte - 34
Fundamentalsatz der Algebra 145
Funktion = Abbildung 26

G
Gaußsches Eliminationsverfahren 100
geometrische Vielfachheit 167
geordnete Menge 32
Gerade 64
gleichmächtig 35
gleichorientierte Basen 265, 266
Grad eines Polynoms ü42, 152
Gramsche Determinante 258
Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren 231
Grassmann-Identität 277
größtes Element 44
Gruppe 48
Gruppen-Homom., -Isom. 52

H
Hauptabschnittsdeterminanten-Kriterium 298
Hauptideal, Hauptidealring 184
Hauptraum 204, 206, 207, 208
hermitesche Matrix 236, 291

I
Ideal 183
idempotent ü47, ü84
Identität 28
Implikation 3
Index eines Eigenwerts 205
induktive Menge 20, 21
Infimum 46
injektiv 27
Inklusionsabbildung 28
invarianter Untervektorraum 174
inverse Matrix 94, 130
inverses Element 48
invertierbar 94, 95
Irrationalität von π 155
irreduzibel 180

Isometrie 281
isometrisch 280, 281
isometrische lin. Abb. 282
Isomorphismus 77

J Jacobi-Identität 277
Jordansche Normalform 211, 214
– Satz von der Jordanschen Normalform 212

K kanonische Basis von K^n 76
kanonische Orientierung von $\mathbb{R}^n$ 269
Kardinalzahl 35
kartesisches Produkt 24
Kette 45
kleinstes Element 44
Körper 55
– der rationalen Fktn 160, ü74
Kofaktorenmatrix 128
Kommutativitätsgesetz 48
Komposition 28
„Komplementärmenge" 18
Komprehensions-Axiom 13
Konjugation 2
Kontinuumshypothese 42
Kürzungsregel 51

L leere Menge 13
Leibniz-Formel (für det) 113
Leitkoeffizient ü42
lichtartig, Lichtkegel 311
lineare Abbildung (= VR-Homom.) 76
linearer Unterraum 64 (= Unter-VR)
lineares Gleichungssystem 97
Linearform 135
Linearkombination 65
linear unabhängig 66, 67
Linksmultiplikation ü27
Linksnebenklasse ü29, ü55
Linksschraube 268

M Mächtigkeit
Matrix 81
– Multiplikation von Matrizen 83
– Matrizenring 84
– Matrizen und lin. Abb.-en 88
Matrix des Basiswechsels 265
Matrix einer Bilinearform 301, 302
Matrix einer lin. Abb bzgl. Basen 132
Matrix eines Skalarprodukts bzgl. einer Basis 235
maximales Element 44
Menge 11, 12
„Menge aller Mengen" 18
Methode der kleinsten Quadrate ü53
minimales Element 44
Minimalpolynom 186
Monomorphismus 77

N Nachfolger 20
natürliche Zahlen 21
– die ersten – 20
Negation 2
negativ orientiert 269
neutrales Element 48
nilpotent ü82, 190, 197, 198, 199, ü88, ü89
Nilpotenzindex 190, 192
normaler Endomorph 251, 252, 253, ü117, ü128(ii)
Normalteiler ü30

normerhaltend 280
Nullelement 49
Nullstelle eines Polynoms 150

O
obere Dreiecksmatrix, -struktur ü 82
Ordnung 32
orientierter Vektorraum 269
Orientierung 266, 269
orthogonale, orthonormale Elemente, Teilmengen 230
orthogonales Komplement 238
orthogonaler Endom. 282, 293, 296
orthogonale Gruppe von V 283
orthogonale Matrix 284, 287, ü 129
orthogonale Gruppe, reelle -, komplexe - 284
Orthogonalisierungssatz für Bilinearformen 303
Orthogonalprojektion 245, ü 113(i)
Orthogonalspiegelung 246, ü 113(ii), ü 130, ü 131
Orthonormalbasis (= ONB) 233

P
π ist irrational
Paar, geordnetes 22
Paarmengen-Axiom 15
Parallelogrammgleichung ü 104
Permutation 50, ü 25, ü 60
- gerade, ungerade 111
Polardarstellung (einer invertierbaren Matrix) = ü 133
Polynom, Polynomring 58, 149, 152
Polynomfunktion ü 33, 149
- Grad einer - 152
positiv definite Bilinearform 223
positiv definite Matrix 236, 297
positiv orientiert 269
Potenzmenge 17
Potenzmengen-Axiom 17
Primkörper ü 48
Produktdarlegung eines Automorphismus ü 105
Projektion, kanonische 31
Pythagoras, Satz von - 257

Q
quadratische Form 303
Quadrupel, geordnetes 23
Quantoren 8

R
Rang 92
rationale Zahlen ü 15
raumartig 311
Rechtsnebenklasse ü 25
Rechtsschraube 268
reelle Zahlen, deren Mächtigkeit 41, 42
reflexiv 30
Regeln des logischen Schließens 5
Relation 7, 25
- inverse - 25
Restklassenring 56
Ring 54
Ring-Homom., -Isom. 59
Russellsche Antinomie 11

S
Sarrus-Regel 118
schiefadjungiert 244
Schraube, obere -, untere - 46
Schraubungssinn 208
Sehnensätze 271
selbstadjungiert 244, 247, 249, 250, ü 128(i)

sesquilinear, Sequilinearform 224

Signum 108

simultan diagonalisierbar ü 79

Skalare 62

skalare Multiplikation 61

Skalarprodukt 223

- kanonisches - auf $\mathbb{K}^n$ 225

Spalte, Spaltenrang, Spaltenraum 90

Spann 65

Spur 139

Steinitz 71

stochastische Matrix ü 71

Summe von UnterVR-en ü 34

Summenzerlegung eines Endom. 219

Supremum 46

surjektiv 27

Sylvesterscher Trägheitssatz 306

symmetrisch 30

symmetrische Gruppe 50, ü 25

symmetrische Matrizen 226, 291, 305

Systemmatrix, -erweiterte- 98

T

Tautologie 5

Teilmenge, -echte- 16

Totalordnung, totalgeordnete Menge 34

transitiv 30

transponierte Matrix 93

Transposition 105

trigonalisierbar 174, 175

Tripel, geordnetes- 23

U

Umkehrabbildung 28

Umkreismittelpunkt ü 123, ü 124

unendlich 35

unendlich-dimensional 75

Unendlichkeits-Axiom 21

unipotent ü 105

unitärer Vektorraum 223

unitärer Endom 282, 292

unitäre Gruppe 284

- von V 283

unitäre Matrix 284

Untergruppe ü 29, ü 30

- von einem Element erzeugt ü 31

Unterkörper 60

Unterring 59

Untervektorraum = linearer Unterraum 64

V

Vandermonde-Determ. ü 63

Vektor 62

Vektoraddition 61

Vektorprodukt 275, 277, ü 127

- verallgemeinertes - 279

Vektorraum 61

Vektorraum-Homom = lineare Abbildung 76

Vereinigungsmenge 16

Vereinigungsmengen-Axiom 15

vergleichbar 33

vollständige Induktion 22

Volumen (nicht orientiertes) von k-Parallelotopen 260, 262

Volumen, orientiertes von n-Parallelotopen 270

W Wahrheitswert 1
- tafel 2
Winkel, nichtorientierter 256
Winkel, orientierter 273
Winkelsumme im Dreieck ü 121
Wohlordnung, wohlgeordnete Menge 47
Wohlordnungssatz 47

Z Zeilen, Zeilenrang, Zeilenraum 90
Zeilenumformung 100
zeitartig 311
Zerlegung ü 16
Zerlegungssatz, erster-, zweiter- 210
Zermelo-Fraenkel 11, 29
- mit Auswahlaxiom 30
Zornsches Lemma 47
Zyklisch ü 31
Zyklische Unterrechtsräume, zyklische Basis 193

Bezeichnungen

A, $\neg A$ 2

$A \wedge B$ 2

$A \vee B$, $A \dot{\vee} B$ 3

$A \Rightarrow B$ 3

$A \Leftrightarrow B$ 4

$\forall_x H(x)$, $\exists_x H(x)$ 8

$x \in Y$ 12

$\emptyset$ 13

$\{x \in A \mid P(x)\}$ 14

$A \cap B$, $A \setminus B$ 14

$\{A, B\}$ 15

$\bigcup A$, $\bigcup_{B \in A} B$ 15

$\bigcup_{i \in I} M_i$ ü 18

$X \subset Y$, $X \subsetneq Y$ 16

$\mathcal{P}(A)$ 17

$\bigcap A$, $\bigcap_{B \in A} B$ 18

$\bigcap_{i \in I} M_i$ ü 18

$0, 1, 2, 3, \ldots$ 20

$S(x) = x + 1$ 20

$\mathbb{N}$ 21

(a, b) 22

(a, b, c) usw. 23

$A \times B$, $A \times B \times C$ 24

$a R b$ 25

$R[M]$, $\hat{R}[M]$, R^{-1} 25

$f : A \to B$ 26

$f(a)$, fa 26

B^A 27

$\tilde{M} \hookrightarrow M$ 28

$g \circ f$ 28

$f | \tilde{M}$ 29

$\bigtimes_{i \in I} M_i$ 29

$[a]_R$, A/R 30

$\leq$, $\preceq$ 32

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 34

$\#A = \#B$, $\#A \leq \#B$ 35

$\#A = n$ 35

$\sup B$, $\inf B$ 46

$S(M)$, S_n 50

K, K^* 55

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$ 56, 57, ü 32

$R[t]$ 58

gU ü 29

K^n 63

$\operatorname{Span} M$ 65

$\dim V$ 75

$\operatorname{Hom}(V, W)$ 77

$\operatorname{End}(V)$, $\operatorname{Aut}(V)$ 77

$M(m \times n, K)$ 82

$M_n(K)$ 84

Φ_A 88

$A_{i\cdot}$, $A_{\cdot j}$ 90

$\operatorname{Rang} A$ 92

A^t 93

$GL(n, K)$ 96

$U_1 + U_2$ ü 34

$\operatorname{char} K$ ü 35

$\operatorname{Bild}(f)$, $\operatorname{Kern}(f)$ ü 30

∂f ü 42

$\operatorname{Lös}(A, b)$ 98

T_{ij} 105

$\operatorname{sign}(\sigma)$ 108

A_n 112

$\det A$ 113

$X_{ij}(A)$ 127

A^{ad} 128

v_* 131

$M_{*B}(f)$ 132

V^* 135

$f^* \in \operatorname{End}(V^*)$ 136

V^{**} 138

$\operatorname{Eig}_\lambda(f)$ 142

F_f 149

G/U ü 55

$M_n(\mathbb{Z})$ ü 64

V/U ü 65

P_A 160

$K(t)$ 160, ü 74

$\tilde{P}_A$ 161

$\operatorname{Eig}_\lambda(A)$ 161

P_f, $\tilde{P}_f$ 166

$\mu(P_f, \lambda)$ 167

$\mathfrak{b}R$ 184

φ_f 185

$h(f)$, $h(A)$ 185

m_f, m_A 186

A^{ad} 189

$N(n)$ 190

$J(\lambda, k)$ ü 93

$\operatorname{Haus}_\lambda(f)$ 204

$\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ ü 99

$\langle , \rangle$ 223

$\| \ \|$ 227

$A^* (A \in M_n(\mathbb{K}))$ 236

$M^\perp$ 239

$L : V \to V^*$ 240

$f^* \in \mathrm{End}(V)$ 241

$\langle A, B \rangle$ ii 118

$\sphericalangle(v, w)$ 256

$G(v_1, \ldots, v_k)$ 258

$\mathrm{Par}(v_1, \ldots, v_k)$ 260

$V_k(\mathrm{Par}(v_1, \ldots, v_k))$ 260

$V_m^\circ(\mathrm{Par}(v_1, \ldots, v_m))$ 270

$\sphericalangle^\circ(v, w)$ 273

$O(V)$, $\mathfrak{u}(V)$ 283

$O(n)$, $O(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{u}(n)$ 284

$M_{\mathcal{A}}(\lambda)$ 301